V.U.J.S.C.

J.S.G.

3285

COMPENDIO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y MISTAS

POR

D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,
ex-Catedrático de Matemáticas del Real Seminario de Nobles de Madrid.

SEGUNDA EDICION.

Corregida y aumentada, con varios casos de igualdad y semejanza de triángulos, por la mucha importancia de esta clase de proposiciones, y tambien con las fórmulas generales para determinar los centros de gravedad.

TOMO I.

MADRID:
imprenta que fué de García.
1826.

ADVERTENCIA.

Un número dentro de un paréntesis denota que la operacion ó proposicion en que se funda la que se está efectuando, se halla en el párrafo que dice dicho número; ademas se pondrá la señal § cuando las citas estén entre cálculos.

Si alguno desease mas estension sobre cualquier punto de los contenidos en este compendio, podrá consultar el Tratado Elemental en el parage correspondiente.

PRÓLOGO.

La benigna acogida que ha merecido al público esta obrita, me ha estimulado á corregir en esta segunda edicion un descuido que se cometió en la primera, al dar la demostracion de la presion que ejercen los fluidos, en el párrafo 367 del tomo segundo; para esto ha sido preciso añadir alguna doctrina al tratar de los momentos y de los centros de gravedad. Tambien he añadido dos nuevos casos de igualdad de triángulos que son los corolarios 4.º y 5.º del § 273 del tomo primero, y otros dos casos tambien nuevos de semejauza de triángulos, que son los contenidos en la segunda parte del escolio 1.º, y en el escolio 2.º del § 331; porque habiendo hallado yo la demostracion de estas proposiciones despues de publicada la primera edicion, juzgo de la mayor importancia y necesidad el que sean conocidas de todos los que emprendan el estudio de las Matemáticas. En cuanto á lo demas, casi no se ha hecho otra alteracion que el haber corregido las erratas de la primera edicion; por lo cual únicamente debo advertir que estando convencido de la urgentísima necesidad que hay de que se propague el estudio de estas ciencias en todas las clases del estado, por lo mucho que influyen en la pública prosperidad, he procurado tomar cuantas medidas han sido conducentes, para que el público pueda obtenerla con mayor equidad, y facilitar hasta por este medio la adquisicion de tan importantes conocimientos.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS

EN ESTE TOMO.

Nombre, figura y valor de algunas letras griegas, de que harémos uso en adelante.

Nombre.	*Figura.*	*Valor.*
Alfa	α	*a*
Beta	ϐ	*b*
Gama	γ	*g*
Delta	Δ	*D*
Tzeta	θ	*tz*
Lambda	λ	*l*
Pi	π, ϖ, Π	*p*, P
Sigma	Σ	*S*
Fi	φ	*f*
Psi	Ψ	*ps*

CORRECCIONES.

Pág.	*Lín.*	*Dice.*	*Debe decir.*
22	1	los	nos
24	32	400307	400306
39	12	$\frac{2987}{3119}$	$\frac{3987}{2119}$
41	5	juntos	junto
46	30	multiplicador	multiplicando
59	26	eg. 2.° $=1\frac{13}{28}$	$=1\frac{13}{23}$
85	33	$(-b+)$	$(-b)$
87	22	$+7c^4d$	$-7c^4d$
89	34	$-\times 3a^5d^6c^3$	$\times -3a^5d^6c^3$
90	35	$+15b^6o^2$	$+15b^6a^2$
92	34	$\frac{20a^9b^5c^md^sf}{a8^4b^2c^nd^rf^2}$	$\frac{20a^9b^5c^md^sf}{8a^4b^2c^nd^rf^2}$
95	1	$=\frac{ax^m z^n . z^{-n}}{bz^n . x^m . x^{-m}}$	$\frac{ax^m . z^n . z^{-n}}{bz^n . x^m . x^{-m}}$
148	21	(A pag. sig.)	(A)
218	últ.	P=CQF	PC=QF
229	7	UY	UT
243	4	serán opuestos	serán el opuesto
250	19	BA:B*d*	BA:B*d′*
253	19	es	se
257	5	será	serán
261	9	BA^2+BC^2	BA^2+AC^2
272	33	$=\frac{\pi DG}{3600}$	$=\frac{\pi DG}{360^\circ}$
288	18	EG=EH	EG=FH
294	33	AEFG	AEFB
295	17	BFKLFC	BFKLGC
296	6	las DR	las AR

Pág.	*Lín.*	*Dice.*	*Debe decir.*
313	11	$\Pi = PB \times \frac{1}{2}L$	$\Pi = P \times \frac{1}{2}L$
340	36	$::\cos.':\cos.$	$::\cos.:\cos.'$
346	1	Pasamos	Pasemos
346	13	AP	AB
349	12	(345 esc. 1.°)	(335 esc. 1.°)
351	22	$=1-\cos.^2$	$=1-\cos.^2 A$
363	24	del la AC	del lado AC

INTRODUCCION.

Se llama *cuerpo* todo lo que es capaz de hacer *impresion* en nuestros sentidos. Las impresiones que nos causan los cuerpos, se llaman *sensaciones*. Las sensaciones consideradas como representando los objetos, se llaman *ideas*; y la facultad, por cuyo medio podemos retener las ideas, se llama *memoria*. Si para dar á conocer el objeto que representa una idea, es absolutamente necesario presentarle al sentido á que pertenece, como la *blancura*, *picante*, etc., la idea es *simple*; y si el objeto se puede hacer conocer sin esta circunstancia como una *mesa*, *caballo*, etc., la idea se llama *compuesta*. Si la idea conviene á un solo objeto, como la de *este libro*, se llama *singular* ó *individual*; y es *abstracta* ó *universal*, cuando conviene á muchos como la idea de *libro*; de manera que para formar una idea universal ó abstracta, *se observará aquello en que convienen muchos objetos, y se prescindirá de lo demas.*

La operacion por cuyo medio podemos prescindir de aquello en que se diferencian varios objetos, se llama *abstraccion*; de manera que abstraccion es *una operacion del alma, por medio de la cual concebimos como separadas, cosas que realmente no lo están.*

Para hacernos cargo de los muchos objetos que se nos presentan, se deben considerar separadamente, lo que se consigue por

medio de la *atencion*; así la atencion es *una operacion del alma, por medio de la cual de muchos objetos que se nos presentan, elejimos uno para hacernos cargo de él*; y haciendo lo mismo con todos los demas, se vendrá en conocimiento de todos ellos.

Como casi todos los objetos son compuestos, no basta la atencion sola para conocerlos, sino que es necesario ir considerando cada una de sus partes, y esto se consigue por la *análisis*, y es *una operacion del alma, por medio de la cual se descompone un todo en sus partes, para ver que relacion tienen entre sí y con el mismo todo, y se vuelven á juntar otra vez para que compongan el mismo todo.* Por ejemplo, si tuviésemos que hacernos cargo de los muebles que habia en una sala, por medio de la atencion elejiríamos uno, v. g. un relox; y por medio de la análisis le descompondríamos en las diferentes piezas de que constaba, para ver que relacion tenian entre sí y con el total de la máquina; y despues las volveríamos á juntar para formar el relox. Lo mismo se ejecutaría con todos los demas muebles.

La exactitud de las ideas depende del mayor grado de análisis qus se haga de los objetos; y de aquí resulta otra division de las ideas que es la contenida en el siguiente ejemplo. Si de muchos sujetos que han estado en una casa, uno sólo se acordase de la calle en que está dicha casa, habrá analizado muy poco, y la idea que de ella tiene se llama *obscura*. Otro que sabiendo la calle, sólo dudase entre dos ó tres casas, habrá analizado mas, y la idea

que tiene de la casa se llama *confusa.* Otro que entrando en la calle, se fuese derecho á la casa sin preguntar á nadie, habrá analizado mas, y la idea que tiene de la casa se llama *clara.* Y otro que no solo supiese la casa, sino que estando léjos de ella, fuese capaz de dar á otro tales señas, que sin preguntar á nadie se fuese derecho á ella, este habrá analizado mas que todos, y la idea que tiene de la casa se llama *distinta* ó *exacta.* Esta es la idea que hemos de procurar adquirir en todos nuestros conocimientos.

Si despues de haber examinado dos objetos, v. g. dos relojes, prestamos nuestra atencion á ambos á un mismo tiempo, entónces se dice que los *comparamos*; de manera que comparacion es *una operacion del alma, por medio de la cual prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á dos objetos.* De la comparacion resultará que el uno será mejor, mayor, etc. que el otro; y este grado de mejoría, mayoría, etc. se llama *relacion*, que *no es mas que el resultado de la comparacion.*

Cuando al comparar dos ideas hallamos que convienen, ó no, é interiormente nos convencemos de ello (como cuando me convenzo de que *la nieve es blanca)*, formamos lo que se llama *juicio*, que es *una operacion del alma, por medio de la cual afirmamos ó negamos una cosa de otra.*

Si se espresa el juicio con palabras (como si yo le digo á otro *la nieve es blanca*), se llama *proposicion*; de manera que proposicion es *un juicio espresado por palabras.*

La proposicion consta de tres partes: *suje-*

to, que es la cosa de que se habla (v. g. en la anterior *la nieve*); *predicado*, que es lo que se afirma ó niega del sujeto (v. g. *blanca*); y *cópula* el verbo (v. g. *es*) que los une ó separa.

Cuando por la comparacion de dos ideas no podemos averiguar su relacion, y para esto las comparamos con otra ú otras, usamos del *raciocinio*, que es *una operacion, por medio de la cual se comparan dos ideas con una ó mas intermedias, para averiguar su relacion.* Si el raciocinio se espresa por proposiciones, se llama *razonamiento.*

Las proposiciones pueden ser *evidentes, ciertas y probables.* Se llaman evidentes ó *axiomas, aquellas cuya verdad se conoce inmediatamente que se pronuncian.* Tales son:

1.° *Una cosa es igual á ella misma.*

2.° *Un todo es igual al conjunto de sus partes.*

3.° *Lo que hagamos con el todo quedará hecho con el conjunto de sus partes; y lo que hagamos con el conjunto de sus partes, quedará hecho con el todo.*

4.° *El todo es mayor que cualquiera de sus partes, ó la parte es menor que el todo.*

5.° *Cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

El primer axioma está al alcance de todos; y los demas lo estarán igualmente, si se tiene presente que cuando una cosa se compone de otras, á la compuesta se le llama *todo*, y á cada una de las componentes se les llama *partes* del mismo todo.

El tercer axioma y el último son de la ma-

yor importancia, pues en ellos se fundan casi todas las demostraciones.

Proposiciones ciertas ó *teoremas*, se llaman *aquellas que para convencer de su verdad es preciso compararlas con los axiomas, y hacer ver que están comprendidas en ellos*; ó de otro modo: teorema es *una proposicion que necesita demostracion*; y demostracion es *un razonamiento seguido, en que se hace ver que la proposicion enunciada, de tal modo concuerda con los principios mas ciertos y evidentes, que no deja duda de su verdad.*

La demostracion puede ser *directa* ó *á priori*, é *indirecta* ó *á posteriori*, que tambien se llama *ad absurdum*. Es directa, *cuando partiendo del sujeto de la proposicion se manifiesta la verdad que se ha enunciado*; é indirecta, *cuando se hace ver que no se puede verificar ninguna otra cosa mas que el enunciado*. Este método de demostrar se llama *método de exaucion*.

Proposiciones probables son *las que unas veces pueden ser verdaderas y otras falsas.*

Segun las cosas que se enuncian en la proposicion, toma esta el nombre de *definicion, problema, corolario, postulado, escolio y lema.*

Definicion es *una proposicion en que se da una idea clara y distinta de lo que se quiere dar á entender*: como las que hemos dado de la atencion, análisis, etc. La definicion debe ser *breve, clara, y no contener al definido.*

Problema es *una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas debemos averiguar alguna desconocida.*

Estas proposiciones se conocen en que principian por el infinitivo ó imperativo del verbo. El problema consta de *resolucion y demostracion*; en la resolucion se dan las reglas para encontrar lo que se busca; y en la demostracion se hace ver que practicando dichas reglas, se llegará a tener lo que se pedia.

Postulado es *un axioma enunciado en particular*: como cuando se dice *en vez de un peso duro se pueden tomar cinco pesetas*.

Escolio es *una proposicion en que se esplica ó advierte alguna cosa*.

Lema es *una proposicion que perteneciendo á otro asunto diferente del que se trata, se enuncia para que sirva de ilustracion ó principio de lo mismo que se va á tratar*.

Tambien hay proposiciones *condicionales*; la parte en que entra la condicion se llama *hipótesis*; y la otra, que es lo que se asegura, se llama *tésis*.

Esto supuesto, se llama *ciencia* el conjunto de todas las proposiciones evidentes y ciertas pertenecientes á un asunto, enlazadas entre sí con cierto órden.

Este órden ó dependencia es lo que se llama *método*, que es *el órden que se sigue en la adquisicion* (ó esposicion) *de nuestros conocimientos*. La circunstancia esencial del método *es que se proceda siempre de lo conocido á lo desconocido*; si se nos dan conocidas las partes, y por ellas hemos de venir en conocimiento del todo, el método se llama *sintético* ó *de composicion*; y si, conocido el todo, hemos de conocer sus partes, el método se llama *analítico* ó *de descomposicion*.

Si observamos un cuerpo cualquiera, v. g. un libro, le hallarémos dotado de muchas propiedades, como son: ocupar un espacio cualquiera, que se llama *estension*; no poder ocupar otro cuerpo el mismo espacio que él á un mismo tiempo, que se llama *impenetrabilidad*; serle indiferente el moverse ó estarse quieto, que se llama *inercia*: poder ser trasladado de una parte del espacio á otra, que se llama *movilidad*; poder permanecer siempre en un mismo sitio, qme se llama *quiescibilidad*; dirijirse hácia la tierra inmediatamente que le falta el apoyo que le sostiene, que se llama *gravedad*; el estar terminado de esta ó de la otra manera, que es lo que constituye su *forma* ó su *figura*, y se llama *figurabilidad*, etc. etc.; y tambien la de poder ser mayor ó menor que se llama *cantidad*; de manera que cantidad es *todo lo que puede aumentar ó disminuir*.

La cantidad se divide en *discreta* y *continua*; discreta es *aquella cuyas partes no tienen ninguna trabazon ni enlace*, como un monton de pesos duros; y continua es *aquella cuyas partes están unidas entre sí*, como las partes de plata que componen un duro. La cantidad forma el objeto de las *Matemáticas*; de manera que entendemos por Matemáticas *las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad*. Como esta solo es susceptible de aumento ó diminucion, las Matemáticas solo podrán *espresar*, *componer y descomponer las cantidades*; y cuando se ejecuta cualquiera de estas operaciones, se dice que se *calcula*.

Las Matemáticas se dividen en *puras y mistas*; se llaman puras *las que tratan de la cantidad con la mayor abstraccion*; y mistas *son las que consideran la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos*. Los ramos de las Matemáticas puras son dos: uno que trata de la cantidad discreta, que se llama *Aritmética universal*, que se divide en *Aritmética propiamente dicha* y en *Algebra*; y otro que trata de la cantidad continua ó de la estension que se llama *Geometría*. Los tratados de las Matemáticas mistas son tantos como propiedades tienen los cuerpos; y aun una misma propiedad dá orijen á diferentes tratados. Por ejemplo: el movimiento considerado en los cuerpos terrestres sólidos, da oríjen á la *Dinámica*; considerado en los liquidos, orijina la *Hidrodinámica* ó *Hidráulica*; considerado en los cuerpos celestes, orijina la Astronomía, etc. etc. etc.

Estas nociones estudiadas con buen método, son suficientes para poder comprender todos los conocimientos que vamos á esponer.

ARITMETICA.

Nociones preliminares, numeracion, division y subdivision de las unidades de pesos y medidas.

1 Se llama *unidad* cualquier cantidad que se elije ó toma para que sirva de término de comparacion ó medida respecto de todas las de su especie. V. g. en una cantidad de dinero espresada en *reales*, sirve el real de unidad; espresada en *duros*, sirve el duro, &c.

El agregado ó conjunto de varias unidades forma lo que se llama *número*. O de otro modo: cuando comparamos una cantidad de dinero con un duro (ó real, &c.) con el fin de averiguar los duros (ó reales, &c.) que hay, el resultado de esta comparacion se llama *número*. Así, cuando despues de haberlos contado decimos que hay *tantos* duros (ó reales), la palabra *tantos* es el número.

Y se llama Aritmética la *ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad espresada por números.*

2 La Aritmética solo puede hacer con los números las tres operaciones de *espresarlos*, *componerlos* y *descomponerlos*. La parte que trata de espresar los números, se llama *numeracion*. Esta puede ser *hablada*, y puede ser *escrita*; la numeracion hablada consiste en *espresar con palabras las diferentes colecciones de unidades.*

3 Para darla á conocer observarémos que cualquier objeto que nos presenta la naturaleza, es en sí lo que llamamos *uno*; esto supuesto, el agregado de uno y uno, se espresa con la palabra *dos*, y por lo tanto *dos* equivale á *uno* y *uno*; para espresar el conjunto de dos y uno, se usa de la palabra *tres*; tres y uno se espresa con la palabra *cuatro*; cuatro y uno

con la palabra *cinco*; cinco y uno con la palabra *seis*; seis y uno con la palabra *siete*; siete y uno con la palabra *ocho*; ocho y uno con la palabra *nueve*; nueve y uno con la palabra *diez*.

4 Ahora se toma esta coleccion de diez unidades por una nueva unidad, que se llama *unidad* de *decena*, y se continúa contando por decenas y unidades, diciendo: *diez y uno*, *diez y dos*, &c.; mas por una irregularidad del lenguaje, en vez de *diez y uno* se dice *once*; en vez de *diez y dos* se dice *doce*; en vez de *diez y tres* se dice *trece*; en vez de *diez y cuatro* se dice *catorce*; en vez de *diez y cinco* se dice *quince*; y despues se continúa regularmente *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*; y para espresar *dos dieces* ó *decenas* se usa de la palabra *veinte*, y se continúa diciendo: *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*,... *veintinueve*; y para espresar *tres dieces* ó *decenas* (y en general cualquier coleccion de decenas) se modifica la palabra *tres* (ó cuatro, cinco, &c.) que las espresa, con la terminacion *enta*, y se dice *treinta*; despues se continúa: *treinta y uno*, *treinta y dos*, *treinta y tres*,... *treinta y nueve*, *cuatro dieces* ó *cuarenta*, *cuarenta y uno*, *cuarenta y dos*,... *cuarenta y nueve*; *cincuenta*, *cincuenta y uno*... *cincuenta y nueve*; *sesenta*, *sesenta y uno*,.. *sesenta y nueve*; *setenta*, *setenta y uno*,... *setenta y nueve*; *ochenta*, *ochenta y uno*,... *ochenta y nueve*; *noventa*, *noventa y uno*,... *noventa y nueve*; *diez dieces* ó *decenas*, que se espresan con la palabra *ciento*.

5 Esta coleccion de diez decenas se toma por una nueva unidad, que se llama *centena*, y se continúa contando por centenas, decenas y unidades, diciendo: *ciento*, *ciento y uno*,... *ciento y diez*,... ciento cincuenta y seis,... doscientos,... doscientos ochenta y cuatro,.. trescientos,... cuatrocientos,... quinientos,... seiscientos,... setecientos,... ochocientos,... novecientos,... novecientos noventa y nueve. Añadiendo *uno* tendrémos *diez cientos*, que se espresa con la palabra *mil*; se toma por una nueva unidad, que se lla-

ma *millar*, y se continúa contando por millares, centenas, decenas y unidades, hasta tener *un millar de millares*, que se llama *millon*; este se vuelve á tomar por unidad, y se continúa contando por millones, centenas de millar, decenas de millar, millares, centenas, decenas y unidades, hasta tener un *millon* de *millones*, que se llama *billon*. Despues se continúa contando hasta un *millon* de *billones*, que se llama *trillon*; y así sucesivamente *cuadrillon*, *quillon*, *sestillon*, &c. &c.; de modo que solo con las trece palabras *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *ciento*, *mil* y *la millon*, modificadas, se pueden espresar todos los números de que puede necesitar el hombre.

6 La numeracion escrita consiste en espresar todos estos números con pocos signos, que se llaman *cifras*, *guarismos* ó *caractéres*. La que nosotros vamos á esplicar consta de los diez guarismos siguientes

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0;
uno,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*,	*siete*,	*ocho*,	*nueve*,	*cero*;

y cada uno espresa la palabra que tiene debajo; advirtiendo que el carácter 0 significa la idea que tenemos de la *nada*, y solo sirve para ocupar en los números el lugar en donde falta alguna especie de unidades.

7 Para espresar con estas diez cifras todos los números posibles, se considerará cada una de ellas con dos valores: uno *absoluto*, que es el que le acabamos de fijar; y otro, *relativo al lugar que ocupa contando de derecha á izquierda*. Así, el guarismo 4 v. g. siempre espresará cuatro cosas; pero si está en el primer lugar de derecha á izquierda, serán cuatro unidades; si está en el segundo, cuatro decenas, &c.

8 En general, *el primer lugar, contando de derecha á izquierda, está destinado para las unidades; el segundo para las decenas; el tercero para las centenas; el cuarto para los millares; el quinto para las decenas de millar; el sesto para las centenas de millar; el séptimo para los millones; el octavo para las dece-*

nas de millon; el noveno para las centenas de millon; el décimo para los millares de millon; el undécimo para las decenas de millar de millon; el duodécimo para las centenas de millar de millon; el décimotercero para los billones; el décimocuarto para las decenas de billon; el décimoquinto para las centenas de billon; el décimosesto para los millares de billon; el décimoseptimo para las decenas de millar de billon; el décimooctavo para las centenas de millar de billon; el décimonono para los trillones; y así succesivamente; el vigésimoquinto para los cuadrillones,... el trigesimoprimo para los quillones, &c.

9 Esto supuesto, para escribir los números, *se seguirán las reglas de una rigorosa traduccion; esto es, se colocarán sucesivamente los guarismos que espresen el número de unidades de cada órden, los unos al lado de los otros, principiando por la izquierda, teniendo bien presente la sucesion de estos órdenes para no omitir ninguno, y ocupando con ceros los lugares de los órdenes de unidades que puedan faltar.*

10 La razon de empezar á escribir por la izquierda, es que la unidad de especie superior es la que está mas á la izquierda, y cuando enunciamos un número, principiamos por la especie superior.

11 Así, si quiero escribir el número *cincuenta y siete mil, seiscientos y tres*; lo primero escribiré la palabra *cincuenta*, que equivale (4) á cinco decenas; por consiguiente, pondré en primer lugar un 5, que para que sean decenas debe seguir (8) á su derecha otro guarismo, el cual ha de ser el que esprese las unidades; y como despues de cincuenta sigue la palabra *siete*, infiero que despues del 5 debo poner un 7 y tendré 57, con lo que están escritas las palabras *cincuenta y siete.* Ahora sigue la palabra *mil*, lo que me indica que para que el 57 esprese millares, faltan aun tres cifras (8); y como la primera que debe seguir es la que esprese las centenas, y en el número dice *seiscientos*, escribiré el guarismo 6 para espresarlas, y tendré 576. Despues debe seguir el

guarismo que esprese las decenas; y como el número dado no las tiene (pues no hay en él las palabras *diez*, *veinte*, *treinta*,... *noventa*, que las espresan), pondré o y tendré 5760. Aun faltan las unidades; y como en el número propuesto dice *tres*, escribiré el guarismo 3 despues del o y tendré 57603, que espresa el número que se queria.

12 Con la misma facilidad se escribirá cualquier otro número, aunque sea mas complicado. V. gr. si quiero escribir el número *ocho mil quinientos sesenta y tres millones, doscientos cuarenta y seis mil*; lo primero escribiré por lo dicho ántes 8563, con lo que tendré escritas las palabras *ocho mil quinientos sesenta y tres*. Como despues sigue la palabra *millones*, me da á conocer que faltan aun seis cifras (8), y la primera que debe seguir es la que esprese las centenas de millar; y como el número dice (ántes de la palabra *mil*) *doscientos*, el primer guarismo que debo poner es el 2, y tendré 85632. Ahora han de seguir las decenas de millar; y como dice *cuarenta*, tendré que poner el 4 y me resultará 856324. Despues siguen los millares; y como dice *seis*, pondré el guarismo 6 y tendré 8563246. Despues deberán seguir las centenas, decenas y unidades que haya en el número propuesto, y como despues de las palabras *seis mil* no sigue nada, pondré tres ceros y tendré 8563246000, que espresa el número dado. Hé aquí varios ejemplos para que se ejerciten los principiantes.

1.° El número *trescientos cuarenta* se escribe 340.

2.° El número *siete mil cincuenta y ocho* se escribe 7058.

3.° El número *noventa mil seiscientos diez* se escribe 90610.

4.° *Doce millones, treinta y ocho mil setecientos cuatro* se escribe 12038704.

5.° *Quinientos tres mil millones y noventa* se escribe 503000000090.

13 Para leer un número cuando está escrito, se

observará el lugar que ocupa cada guarismo y la especie de unidades que espresa, y se pronuncia la palabra correspondiente á cada uno. Esto es fácil, si el número tiene pocos guarismos; pero si es complicado *se divide en porciones de seis guarismos, empezando por la derecha; en la primera separacion se pone un* 1, *bien sea por la parte de arriba ó bien por la de abajo; en la segunda un* 2; *en la tercera un* 3, &c., *despues se divide cada porcion de seis guarismos en dos de tres con una coma; y se empieza leyendo por la izquierda, pronunciando* mil *donde se encuentre una coma, y donde se halle un* 1, *un* 2, *un* 3, &c. millon, billon, trillon, &c., *y luego al fin se pronuncia unidades.* Ejecutando esto con el número

$$468321572057002154300807$$

tendré $468,321_3 572,057_2 002,154_1 300,807$

que se lee: *cuatrocientos sesenta y ocho mil, trescientos veintiun trillones, quinientos setenta y dos mil cincuenta y siete billones, dos mil ciento cincuenta y cuatro millones, trescientas mil ochocientas y siete unidades.*

14 Ahora, si á un número cualquiera se le pone un cero á la derecha, *se le hace diez veces mayor;* porque su último guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresa decenas; las decenas, centenas, &c. del primitivo, se habrán hecho tambien diez veces mayores, luego habiéndose hecho cada parte diez veces mayor, lo habrá quedado el todo (intr. ax. 3.°). Del mismo modo se demostraría que añadiendo dos ceros, *se hace el número cien veces mayor,* &c.

15 Los números se dividen en *abstractos* y *concretos*; se llaman abstractos *los que no determinan la especie de unidades*, como *cinco*, *veinte*, y todos los que hemos considerado ántes; y concretos *son los que la determinan*, como *cinco hombres*, *seis manzanas*, &c.

Los números concretos se subdividen en *homojéneos* y *heterojéneos*; se llaman homojéneos *los que espresan unidades de una misma especie*, como 5 hombres, 60 hombres, &c.; y heterojéneos *los que se*

refieren á diferentes unidades, como 20 hombres 80 manzanas, &c.

El número se llama *dijito* ó *simple*, cuando se escribe con un solo guarismo; y *compuesto*, cuando se escribe con mas.

Ademas, el número se divide en *entero*, *quebrado*, *misto*, *fraccionario* y *quebrado de quebrado*. Entero *es el que se compone exactamente de unidades*, como todos los considerados hasta aquí; quebrado *el que espresa partes de la unidad*, como *tres cuartos*, *dos quintos*, &c.; misto *el que se compone de entero y quebrado*, como *cuatro y medio*; fraccionario *es aquel en que, contando por partes de la unidad, se llega á tener una unidad ó mas de una unidad*, como *tres tercios*, *cinco tercios*; y por último, quebrado de quebrado *es el que espresa partes de partes de la unidad*, como *los tres cuartos de dos quintos*, &c.

16 En los pesos y medidas españolas se observa la ley siguiente.

Las medidas de longitud se refieren al *pie*; este se divide en 16 *dedos*, y el dedo en *mitad*, *cuarta*, *ochava* y *diez y seisava parte*; tambien se divide en 12 *pulgadas*, y la pulgada en 12 *líneas*.

La *vara* se compone de tres pies, y la *legua* de 20000 pies.

17 La primera de las medidas agrarias es el *estadal cuadrado*, que es un cuadro de 4 varas, ó 12 pies de largo y otro tanto de ancho. Despues sigue la *aranzada*, que se compone de 20 estadales en cuadro; y luego la *fanega de tierra*, que se compone de 24 estadales en cuadro. La fanega de tierra se divide en 12 *celemines*, y el celemin en 4 *cuartillos*.

18 Para los granos, la sal y demas cosas secas, la unidad de especie superior es el *cahiz*, que se compone de 12 *fanegas*, y la fanega de 12 *celemines*; tambien se divide la fanega en 2 *medias fanegas* y en 4 *cuartillas*.

19 Para los líquidos, escepto el aceite, se usa de la *cántara* ó *arroba*, que se divide en 2 *medias*

cántaras; la media cántara en 2 *cuartillas*; la cuartilla en 2 *azumbres*; la azumbre en 2 *medias azumbres*; la media azumbre en 2 *cuartillos*; el cuartillo en 2 *medios cuartillos*; el medio cuartillo en 2 *copas*; de modo que la cántara tiene 32 cuartillos. El *moyo* se compone de 16 cántaras.

Esceptuamos el aceite, porque sus medidas están arregladas al peso; y así se usa de la *arroba*, *media arroba*, *cuartilla* ó *cuarto de arroba*, *libra*, *media libra*, *cuarteron* ó *panilla*, *y de la media panilla*.

20 Para las cosas que se venden al peso, la unidad de especie superior es el *quintal*, que se compone de 4 *arrobas*; la arroba de 25 *libras*; la libra de 16 *onzas*; la onza de 16 *adarmes*; el adarme de 3 *tomines*, y el tomin de 12 *granos*. La libra se divide en 2 *medias libras*, en 4 *cuarterones*, y en 8 *medios cuarterones*; la onza en 2 *medias onzas*, en 4 *cuartas* y en 8 *ochavas* ó *dracmas*; la libra se divide tambien en 2 *marcos*, y el marco en 8 *onzas*.

21 En la moneda la unidad de especie superior es el *doblon*, que se compone de 4 *pesos*; el peso de 15 *reales*, y el real de 34 *maravedises*.

22 En el tiempo se observa la siguiente division: el *siglo* se compone de 100 *años*; el año de 12 *meses*; ó de 365 dias y algo mas; el mes de 28, 30 ó 31 *dias*; el dia de 24 *horas*; la hora de 60 *minutos*; el minuto de 60 *segundos*, &c.

De la operacion de sumar ó de la adicion.

23 Aunque es verdad que dado un número solo se le podrá hacer mayor ó menor, los diferentes modos que hay de aumentar ó disminuir los números, conducen á seis operaciones, que son: *sumar*, *restar*, *multiplicar*, *dividir*, *elevar á potencias y estraer raices*.

Sumar es *reunir en un solo número el valor de dos ó mas homojéneos*; la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *adicion*; los números

que se dan para sumar, *sumandos*; y lo que resulta de la operacion, *suma*. Los sumandos han de ser homojéneos, porque un número de hombres, por ejemplo, no puede aumentar uno de caballos, &c.

Se indica esta operacion poniendo entre los sumandos este signo +, que se lee *mas*. Así, la espresion 5 + 3 se lee: *cinco mas tres*; y para indicar que despues de hecha esta suma, resulta 8, se pone el signo =, que se lee *igual*; de manera que la espresion 5 + 3 = 8, se lee: *cinco mas tres igual ocho*.

24 Para poder sumar, es necesario saber perfectamente lo que componen juntos de dos en dos, los números díjitos, cuyas sumas son las contenidas en la siguiente

Tabla para sumar.

1 y 1 son 2	2 y 2 son 4	3 y 3 son 6
1 y 2....... 3	2 y 3....... 5	3 y 4....... 7
1 y 3....... 4	2 y 4....... 6	3 y 5....... 8
1 y 4....... 5	2 y 5....... 7	3 y 6....... 9
1 y 5....... 6	2 y 6....... 8	3 y 7....... 10
1 y 6....... 7	2 y 7....... 9	3 y 8....... 11
1 y 7....... 8	2 y 8....... 10	3 y 9....... 12
1 y 8....... 9	2 y 9....... 11	
1 y 9....... 10		
4 y 4 son 8	5 y 5 son 10	6 y 6 son 12
4 y 5....... 9	5 y 6....... 11	6 y 7....... 13
4 y 6....... 10	5 y 7....... 12	6 y 8....... 14
4 y 7....... 11	5 y 8....... 13	6 y 9....... 15
4 y 8....... 12	5 y 9....... 14	
4 y 9....... 13		
7 y 7 son 14	8 y 8 son 16	
7 y 8....... 15	8 y 9....... 17	
7 y 9....... 16	9 y 9....... 18	

25 Sabida la tabla, se saben sumar de memoria todos los números díjitos: y para sumar un número

compuesto con un díjito; *se añadirá el díjito á las unidades del compuesto, y se pronunciará el todo*; si de la suma del díjito con las unidades del compuesto resulta alguna decena, *se pronuncia en la suma la decena inmediatamente mayor á la que lleve el compuesto*. V. gr. 25 y 4 (diciendo: 5 y 4 son 9) son 29; 27 y 8 (diciendo 7 y 8 son 15) son 35, &c.

26 Entendido esto, para sumar toda clase de números enteros resolverémos el siguiente

Problema. *Sumar números enteros.*

Resolucion. *Colóquense todos los sumandos, los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tírese despues una raya; empiécese á sumar por la columna de las unidades, y súmense todas las de los sumandos: esta suma se compondrá ó de unidades solas, ó de decenas solas, ó de decenas y unidades; si se compone solo de unidades, se pone debajo de la raya el guarismo que las espresa, de modo que se corresponda con las unidades de los sumandos; si se compone solo de decenas, se pondrá* o *debajo de las unidades de los sumandos, y las decenas se guardarán para sumarlas con las de la columna siguiente; si hay decenas y unidades, se colocan las unidades debajo de las unidades, y se guardan las decenas para sumarlas con las de la columna inmediata. Despues se suma la columna de las decenas, teniendo cuidado de sumar con el primer guarismo las que resultaron de la suma de las unidades: esta suma de decenas se compondrá ó de decenas solamente, ó solo de centenas, ó de centenas y decenas; si solo contiene decenas, se pone debajo de la columna de las decenas el guarismo que las espresa; si tiene solamente centenas, se pone* o *debajo de las decenas, y se guardan las centenas que resulten para sumarlas con las de los sumandos; si contiene centenas y decenas, se colocan las decenas debajo de las decenas, y las centenas se guardan para sumarlas con las de la columna de la izquierda.* Luego, se

pasa á sumar las centenas, teniendo cuidado de añadir al primer guarismo las que se llevaban de la suma de las decenas; y si en la suma de las centenas hay millares, se guardan para sumarlos con los de la columna inmediata; y así se continúa hasta llegar á la última columna de la izquierda, de cuya suma si resulta alguna ó algunas unidades de especie superior, se ponen á la izquierda del guarismo últimamente puesto; y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.

Ejemplo. Si quiero sumar los números 3572, 696, 57 y 709, los pondré los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tiraré despues una raya en esta forma:

3572
696
57
709
———
5034

Empiezo á sumar por las unidades, y digo: 2 unidades y 6 son 8, y 7 son 15, y 9 son 24; en 24, que son unidades, hay 2 decenas y 4 unidades, coloco las 4 unidades debajo de la columna de las unidades, y guardo las 2 decenas para sumarlas con las de la columna siguiente, en que digo: 7 decenas, y 2 que llevaba de la suma de las unidades, son 9 decenas, y 9 son 18, y 5 son 23, y o son 23; en 23, que son decenas, hay tres decenas y 2 centenas; por lo cual pongo un 3 debajo de las decenas, y guardo las 2 centenas para sumarlas con las de la columna inmediata, diciendo: 5 centenas, y 2 que llevaba, son 7 centenas, y 6 son 13, y 7 son 20; en 20, que son centenas, hay 2 millares justos y ninguna centena; por lo que pongo o debajo de las centenas, y guardo los 2 millares para la columna inmediata, en que digo: 3 y 2 que llevaba son 5, que pongo debajo de los millares; y como ya no hay mas guarismos, digo que la suma de los números propuestos es *cinco mil treinta y cuatro.*

Escolio. Al sumar cada columna no se necesita ir repitiendo si son unidades, decenas, &c.; pues como por el sistema de numeracion cada diez unidades

componen una de especie superior, se suman los guarismos de cada columna como si sólo espresasen unidades, y despues de colocar debajo de la columna que se suma, las unidades sencillas que resulten, se llevan para la columna inmediata tantas unidades como decenas resultaron en la suma de la columna anterior.

27 Como el problema consta de resolucion y demostracion, y hasta ahora sólo hemos dado la resolucion, nos falta la segunda parte que es la

Demostracion. La colocacion de los sumandos es por comodidad; el tirar la raya es por claridad, esto es, para que no se confunda la suma con los sumandos, todo lo demas está reducido á que en el número de debajo de la raya están todas las unidades, decenas, centenas, &c., esto es, todas las partes de los sumandos; y como lo que se hace con las partes (intr. ax. 3.°) queda hecho con el todo, se infiere que el número que está debajo de la raya es la suma de todos los sumandos, *que era lo que debia hacer y demostrar*, que se espresa: L. Q. D. H. y D.

Esc. Si fuesen muchos los sumandos, se podrian hacer varias sumas de á seis ú ocho sumandos cada una, y luego se sumarian estas sumas; pero es mejor acostumbrarse á hacer siempre la operacion de una vez, como se ve en los siguientes ejemplos.

1.°
4723
87412
7029
379408
———
478572

2.°
7537
96425
17584
2563
———
124109

3.°
45638
7946
369204
70803
974932
67960
540316
47210
204562
38930
———
2367501

4.°
49673
35486
359864
68397
75386
8535
56384
724836
97537
35791
———
1511889

5.°
35286
5732
93468
74253
———
208739

6.°
38497
98704
2746
4821
———
144768

De la operacion de restar ó de la sustraccion.

28 La primera operacion de disminuir es la de *restar*, que es *averiguar la diferencia entre dos números homojéneos*; la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *sustraccion*; el número de que se ha de restar, *minuendo*; el que se resta, *sustraendo*; y lo que resulta de la operacion, se llama *resta esceso ó diferencia.*

El minuendo y sustraendo deben ser homojéneos por razones análogas á las dichas (23).

Se conoce el minuendo en que lleva siempre antepuesta la preposicion *de*; y para indicar una operacion de restar se escribe el minuendo, despues este signo—, que se lee *ménos*, y luego el sustraendo que es el otro número; y para indicar el resultado se pone el signo =. Así, la espresion 7—4=3, quiere decir, que *despues de quitar* 4 *de* 7 *quedan* 3, y se lee: *siete ménos cuatro igual tres.*

29 Entendido esto, pasemos á resolver el siguiente Problema. *Restar números enteros.*

Res. *Colóquese el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tírese despues una raya debajo del sustraendo; véase las unidades que faltan á las del sustraendo para que tenga las mismas que el minuendo, y las que le falten se ponen debajo de la raya en la columna de las unidades; ejecútese lo mismo con las decenas, centenas, millares, &c., y el número que salga debajo de la raya será la resta.*

Ejemp. Si de 47835 quiero restar 23512, veré que el número que lleva la preposicion *de* es el 47835; por consiguiente este es el minuendo, y por lo mismo colocaré el sustraendo 23512 debajo de él, como aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 47835 \\ 23512 \\ \hline 24323 \end{array}$$

Y despues de tirada la raya, diré: de 2 unidades á 5 unidades van 3, que pongo debajo de la raya en la columna de las

unidades; de 1 decena á 3 van 2, que pongo debajo de la raya en la columna de las decenas; de 5 centenas á 8 van 3, que pongo debajo; de 3 millares á 7 van 4, que pongo debajo; de 2 decenas de millar á 4 van 2, que pongo debajo de su columna correspondiente; y tendré que la diferencia entre los dos números propuestos es 24323.

Dem. El colocar el sustraendo debajo del minuendo es por comodidad, y el tirar la raya por claridad; todas las demas reglas se reducen á que por ellas encontramos la diferencia entre las unidades de los dos números propuestos, la de las decenas, la de las centenas, &c., esto es, que hallamos la diferencia de todas las partes de los números dados; y como todas estas diferencias las hemos ido colocando las unas al lado de las otras en sus lugares correspondientes, resulta que su conjunto formará (intr. ax. 2.°) la diferencia total. L. Q. D. H. y D.

30 Al ejecutar las restas parciales no se necesita repetir si son unidades, decenas, &c., sino hacer siempre la resta como si fuesen unidades sencillas. V. g. si quiero restar 47305 de 58639, los colocaré como aquí se presenta:

Y despues de tirada la raya diré: de 5 á 9 van 4, que pongo debajo; de 0 á 3 van 3; de 3 á 6 van 3; de 7 á 8 va 1, y de 4 á 5 va 1; y colocando estas diferencias en sus lugares respectivos, digo que la diferencia total es 11334.

$$\begin{array}{r} 58639 \\ 47305 \\ \hline 11334 \end{array}$$

31 En la operacion de restar sucede con frecuencia que algunos guarismos del minuendo sean menores que los correspondientes del sustraendo. En este caso *se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda del minuendo*, la cual como vale diez respecto del guarismo que se considera, se le añaden á este, y de su suma se resta el guarismo del sustraendo; y cuando se pasa á restar el otro, *se considera el guarismo del minuendo con una unidad ménos*; pero es mas análogo con el modo de procecer en las

demas operaciones, dejar los guarismos del minuendo como lo que sean; y añadir una unidad al correspondiente del sustraendo. V. g. si quiero hallar la diferencia entre 58276 y 23848, los colocaré como he dicho (29) y aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 58276 \\ 23848 \\ \hline 34428 \end{array}$$

Y despues de tirada la raya diré: de 8 á 6 no puede ser, es decir, que al 8 no le faltan ningunas unidades para convertirse en 6, ó que no puedo quitar 8 al que no tiene mas de 6; por lo mismo tomo una unidad del guarismo inmediato 7, que como vale 10 respecto de las del 6, las sumo y tengo 16; de cuya suma ya puedo restar el 8 diciendo: de 8 á 16 van 8 que pongo debajo; ahora podría considerar el 7 como 6, por haberle quitado una unidad, y decir de 4 á 6 van 2; pero es mejor acostumbrarse á añadir dicha unidad al guarismo del sustraendo; y así, diré: 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 7 van 2 que coloco debajo; paso á la columna inmediata y digo: de 8 á 2 no puede ser; tomaré una unidad del guarismo inmediato, y hallaré que de 8 á 12 van 4, que pongo debajo, y llevo 1; 3 y 1 que llevo son 4, de 4 á 8 van 4 que pongo, y no llevo nada; de 2 á 5 van 3 que pongo debajo, y resulta la diferencia 34428.

32 Tambien suele ocurir en esta operacion *el que el minuendo termine en ceros, ó que tenga ceros entre sus guarismos significativos*; en cuyo caso se *deja el minuendo como lo que es, y se añade una unidad al guarismo del sustraendo, siempre que para restar el anterior se haya tenido que tomar unidad ausiliar.* V. g. si de 370480000, quiero restar 35729486, los colocaré como aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 370480000 \\ 35729486 \\ \hline 334750514 \end{array}$$

Y despues de tirada la raya diré: de 6 á 10 van 4, y de 10 llevo 1; 8 y 1 son 9, á 10 va 1, y de 10 llevo 1; 1 y 4 son 5, á 10 van 5, y llevo 1; 1 y 9 son 10, á 10 va cero, y llevo 1; 1 y 2 son 3, á 8 van 5, y no llevo nada; de 7 á 14 van 7, y llevo 1; 1 y 5 son 6, á 10 van 4, y

llevo 1; 1 y 3 son 4, á 7 van 3, y no llevo nada; y como del 3 que queda á la izquierda no tengo nada que restar, le pongo debajo.

33 La razon de esta práctica, contrayéndonos al primer ejemplo, es que para poder restar el 8 tuve que tomar una unidad ausiliar del 7; de donde se infiere que al restar el 4 no se debe considerar al 7 mas que como 6; pero si dejo al 7 como lo que es, y cuando voy á restar el 4 tengo cuidado de quitarle una mas, resulta que cualquier práctica es igualmente segura, aunque la segunda es preferible.

Otros ejemplos de sustraccion.

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
3571042	4268013	1350304	2570842	3204005
683475	586435	584258	643576	863957
2887567	3681578	0766046	1927266	2340048

De la multiplicacion.

34 La segunda operacion de aumentar es la de *multiplicar*. Esta es el caso particular de la suma en que todos los sumandos son iguales; y así, se dice que multiplicar *es tomar un número tantas veces como unidades tiene otro*. La operacion se llama *multiplicacion*; el número que se ha de tomar, se llama *multiplicando*; aquel que con sus unidades espresa las veces que se ha de tomar el multiplicando, se llama *multiplicador*; y lo que resulta de la operacion se llama *producto*; el multiplicando y multiplicador juntos, se llaman *factores* del producto.

La operacion de multiplicar se indica escribiendo el multiplicando, despues un punto ó este signo $\times$, y luego el multiplicador; así, 4.5 ó 4×5 indica que se ha de multiplicar el 4 por el 5; y para indicar el resultado se usa tambien del signo $=$; de manera que $4.5=20$, ó $4\times5=20$, espresa que el producto de multiplicar 4 por 5 es 20, y se lee: 4 *multiplicado por*

5 *igual* 20. Ocurre con mucha frecuencia el hacer oficios de multiplicando ó de multiplicador, sumas ó restas indicadas; en este caso se encierran en un paréntesis de este modo: $(3+1)\times(7-2)=20$; que quiere decir que la suma de 3 con 1 que es 4, se debe multiplicar por lo que queda de restar 2 de 7 que es 5; y por eso hemos puesto el producto 20.

35 La definicion de la multiplicacion manifiesta que el producto debe ser de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador debe ser un número abstracto, que solo dice las veces que se ha de tomar ó sumar el multiplicando. En algunas cuestiones conviene distinguir los factores; mas en el producto no influye el que se truequen sus oficios, como vamos á manifestar en el siguiente

36 Teorema. *El órden de los factores no altera el producto.*

Esplicacion. Si quiero multiplicar 5 por 4, voy á demostrar que el producto será el mismo, ya multiplique el 5 por el 4, ó ya el 4 por el 5.

Dem. Pues que la multiplicacion es una suma abreviada, tendré que sumando cuatro veces el 5, hallaré el producto que busco; pero si descompongo á cada 5 en las cinco unidades de que consta, deberé sacar el mismo resultado de sumar estas unidades que de sumar los cuatro 5 á que equivalen; por lo mismo, indicando y ejecutando la operacion como aquí se ve:

$$
\begin{array}{l}
5=1+1+1+1+1\\
5=1+1+1+1+1\\
5=1+1+1+1+1\\
5=1+1+1+1+1\\
\hline
20=4+4+4+4+4
\end{array}
$$

Observo que el conjunto de unidades que están á la derecha de los signos de igualdad, equivalen á los cuatro 5 que están en columna; pero estas mismas unidades, sumadas, equivalen á los cinco 4 que hay debajo de la raya; luego si cuatro 5 equivalen á cinco 4, será cuatro veces un 5 igual cinco veces un 4; y por lo mismo cuatro veces 5 es igual á cinco veces 4 ó $4\times5=5\times4$, que era L. Q. D. D.

37 Entendido esto, para poder ejecutar una multiplicacion, es indispensable saber perfectamente los productos que resultan de multiplicar entre sí los números díjitos, que son los contenidos en la siguiente:

Tabla de los productos de los números díjitos.

1 por 1 es 1	2 por 2 son 4	3 por 3 son 9
1 por 2.... 2	2 por 3.... 6	3 por 4....... 12
1 por 3.... 3	2 por 4.... 8	3 por 5....... 15
1 por 4.... 4	2 por 5.... 10	3 por 6....... 18
1 por 5.... 5	2 por 6.... 12	3 por 7....... 21
1 por 6.... 6	2 por 7.... 14	3 por 8....... 24
1 por 7.... 7	2 por 8.... 16	3 por 9....... 27
1 por 8.... 8	2 por 9.... 18	
1 por 9 ... 9		
4 por 4 son 16	5 por 5 son 25	6 por 6 son 36
4 por 5.... 20	5 por 6.... 30	6 por 7...... 42
4 por 6.... 24	5 por 7.... 35	6 por 8....... 48
4 por 7.... 28	5 por 8.... 40	6 por 9....... 54
4 por 8.... 32	5 por 9.... 45	
4 por 9.... 36		
7 por 7 son 49	8 por 8 son 64	9 por 9 son 81
7 por 8.... 56	8 por 9.... 72	
7 por 9.... 63		

10 por 10 son	100
10 por 100........	1000
10 por 1000......	10000
10 por 10000.....	100000
10 por 100000...	1000000

38 En la multiplicacion pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un número díjito por otro díjito; un compuesto por un díjito, ó un díjito por un compuesto; y un compuesto por otro compuesto.* Para el prime-

ro basta saber de memoria la tabla anterior; para el segundo resolverémos el siguiente

39 Problema: *Multiplicar un número compuesto por un díjito.*

Res. *Colóquese el díjito debajo de las unidades del compuesto, y tírese una raya por la parte inferior; multiplíquese el guarismo de las unidades del multiplicando, que es el compuesto, por el multiplicador que es el díjito: si en este producto hay solo unidades, se colocan debajo de las de los factores: si contiene solo decenas, se pone o en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata: y si contiene decenas y unidades, se ponen las unidades debajo de las de los factores, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas. Despues se multiplican las decenas del multiplicando por el mismo multiplicador; á su producto se añaden las que se llevaban del producto de las unidades, y se colocan las decenas que resulten debajo de las decenas, guardando las centenas, si las hay, para añadirlas al producto de las centenas de la columna inmediata. Luego, se multiplican por el mismo multiplicador las centenas del multiplicando, á cuyo producto se añaden las que se llevaban del producto de las decenas; y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicando. Si en el último producto hay algunas unidades de especie superior que llevar, se colocan á la izquierda; y el número que resulta debajo de la raya es el producto.*

Ejemp. Si quiero multiplicar 453 por 6, ó 6 por 453, colocaré el 6 debajo de las unidades del 453, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 453 \\ 6 \\ \hline 2718 \end{array}$$

Tiro debajo una raya, y empiezo á multiplicar diciendo: 3 por 6 son 18, que son unidades; y como en 18 unidades hay 1 decena y 8 unidades, coloco el 8 debajo de las unidades de los factores, y guardo la decena para añadirla al producto

de las decenas, y digo: 5 por 6 son 30, y 1 que llevaba son 31, que son decenas; y como en 31 decenas hay 3 centenas y 1 decena, coloco el 1 debajo de las decenas, y guardo las 3 centenas para añadirlas al producto de la columna siguiente, en que digo: 4 por 6 son 24, y 3 que llevaba son 27, que son centenas; y como en 27 centenas hay 2 millares y 7 centenas, coloco las 7 centenas, y guardo los 2 millares para añadirlos al producto de la columna siguiente; pero como ya no hay mas guarismos en el multiplicando, coloco estos 2 millares á la izquierda del 7, y tengo que 453 multiplicado por 6 da 2718 por producto.

Dem. La colocacion de los factores es por comodidad, y la raya se tira para claridad. Todas las demas reglas están reducidas á multiplicar las unidades, las decenas, centenas, &c., esto es, todas las partes del multiplicando por el multiplicador; y como todos los productos parciales los hemos ido reuniendo en uno solo, resulta que el número que está debajo de la raya es el producto de todas las partes de que se compone el multiplicando por el multiplicador; luego (intr. ax. 3.°) será el producto total. L. Q. D. H. y D.

40 Al hallar cada producto no se necesita ir espresando la especie de unidades, de manera que en la práctica bastan las palabras del siguiente ejemplo. Si quiero multiplicar 7263 por 8, colocaré los números como he dicho y aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 7263 \\ 8 \\ \hline 58104 \end{array}$$

y despues de tirada la raya diré: 3 por 8 son 24, pongo el 4 y llevo 2; 6 por 8 son 48, y 2 que llevaba son 50, pongo 0 y llevo 5; 2 por 8 son 16, y 5 que llevaba son 21, pongo 1 y llevo 2; 7 por 8 son 56, y 2 que llevaba son 58, pongo el 8 y llevo 5; que como no hay mas guarismos en el multiplicando, coloco el 5 á la izquierda del 8, y resulta que el producto de 7263 por 8 es 58104.

41 Ahora observarémos que *todo número multiplicado por la unidad, ó la unidad multiplicada por*

cualquier número, da por producto el mismo número; y que cero multiplicado por cualquier número, ó al contrario, da cero por producto.

42 Si atendemos al sistema de numeracion, verémos (14) que un número resulta multiplicado por 10, solo con añadirle un 0; se le multiplica por 100, con añadirle dos ceros, &c.; y en general, para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, *se colocarán á la derecha de dicho número tantos ceros como acompañen á la unidad.*

43 De aquí se sigue que la multiplicacion de un número cualquiera por otro de un guarismo significativo y ceros, se reduce á la de por uno díjito; para lo cual *se multiplica el número compuesto por el guarismo significativo, y al producto se le añaden tantos ceros como le acompañen.*

En efecto, para multiplicar 537 por 400, indicaré la operacion de este modo: 537×400;
pero 400 es lo mismo que 4×100, luego poniendo en vez de 400 este valor, la espresion anterior se convertirá en 537×4×100;
pero aquí tengo indicado que el producto de 537 por 4, que (40) es 2148, le debo multiplicar por 100; y como para multiplicar por 100, basta solo añadir dos ceros, resulta que si al 2148 le añado dos ceros, tendré que 214800 es el producto de 537 por 400.

Otros ejemplos de multiplicacion.

1.°	2.°	3.°	4.°
5787	95687	8040753	14257839
8	7	60	5000
46296	669809	482445180	71289195000

44 Comprendido esto, pasemos al tercer caso que esplicarémos en el siguiente

Problema. *Multiplicar un número compuesto por otro compuesto.*

Res. *Tómese por multiplicador el que tenga mé-*

los guarismos, y póngase debajo del multiplicando, que es el otro número, de modo que se correspondan en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, &c.; tírese una raya; multiplíquese todo el multiplicando por las unidades del multiplicador (40), *cuyo producto se pondrá debajo de la raya de modo que caigan las unidades, decenas, &c. debajo de las unidades, decenas, &c. de los factores; multiplíquese despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y colóquese este producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda; luego, multiplíquese todo el multiplicando por el guarismo siguiente del multiplicador, y colóquese este producto debajo del antecedente, corriéndole tambien otro lugar hácia la izquierda; y continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador. Despues se tirará debajo de estos productos parciales otra raya; se sumarán todos ellos, y la suma será el producto que se pide.*

Ejemp. Si quiero multiplicar 8237 por 536, tomaré por multiplicador el 536 y le colocaré debajo del multiplicando, en esta forma:

Y despues de tirada la raya, multiplicaré el 8237 por 6, é iré colocando el producto debajo de la raya como en el caso dicho (40); despues paso á multiplicar todo el multiplicando 8237 por el segundo guarismo del multiplicador que es el 3, y coloco su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda. Paso despues á multiplicar todo el multiplicando por el tercer guarismo del multiplicador, que es el 5, y coloco su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda. Tiro despues una raya, porque ya no hay mas guarismos en el multiplicador; sumo todos estos productos parciales, y tengo en la suma 4415032 el producto de los dos números propuestos.

$$
\begin{array}{r}
8237 \\
536 \\
\hline
49422 \\
24711 \\
41185 \\
\hline
4415032
\end{array}
$$

Dem. El tomar por multiplicador el de ménos guarismos es porque el órden de los factores (36) no altera el producto, y de este modo resulta la operacion con mas sencillez; su colocacion es por comodidad, y el tirar la raya por claridad; todas las demas reglas están reducidas á multiplicar todo el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y hemos de colocar este producto debajo del guarismo de las decenas del anterior, porque de multiplicar por decenas (42) debe resultar al fin un cero, y los guarismos significativos deben empezar desde las decenas en adelante, y por consiguiente se deben colocar debajo de las decenas del primer producto parcial, para poder ejecutar despues la suma; despues hemos multiplicado por las centenas, y así sucesivamente, hasta haber multiplicado todo el multiplicando por todos los guarismos ó partes del multiplicador; pero todos estos productos los hemos sumado y reunido en un solo número, que es el que sale debajo de la raya; luego (intr. ax. 3.°) este número que contiene la suma de los productos del multiplicando por todas las partes del multiplicador, contendrá el producto de todo el multiplicando por todo el multiplicador. L.Q.D.H. y D.

Ejemplos de multiplicacion.

1.°	2.°	3.°
78546	85368	947586
3254	647	4798
314184	597576	7580688
392730	341472	8528274
157092	512208	6633102
235638		3790344
255588684	55233096	4546517628

4.° El producto de 695725 por 8563 es 5957493175.

5.° El producto de 85326 por 475 es 40529850.

6.° Y el de 357964 por 4867 es 1742210788.

45 La operacion de multiplicar se abrevia *cuando uno ó ambos factores terminan en ceros*, lo que se consigue *multiplicando solo los guarismos significativos, y añadiendo al producto tantos ceros como hay al fin en ambos factores juntos.*

En efecto, si tengo que multiplicar 6300 por 56, será en virtud de lo espuesto (§ 43)

$$6300\times56=63\times100\times56= (\S\ 36)\ 63\times56\times100.$$

Luego si multiplico el 63 por 56, y al producto le añado dos ceros (42), tendré en 352800 el producto de estos tres factores, ó el de los dos primitivos.

Del mismo modo si fuese 633000 por 2500, tendria $633000\times2500=633\times1000\times25\times100=$

$$633\times25\times1000\times100=1582500000.$$

Tambien se abrevia esta operacion *cuando los ceros se hallan entre los guarismos significativos del multiplicador*; en cuyo caso *se multiplica el multiplicando por los guarismos significativos del multiplicador, hasta llegar á los ceros; en llegando á estos no se multiplica por ellos, y se pasa á multiplicar por los demas guarismos significativos; pero teniendo cuidado de correr el primer producto hácia la izquierda tantos lugares mas uno, cuantos ceros hay*; es decir; que si hay un cero se debe correr el primer producto dos lugares; si dos ceros, tres lugares, &c. á la izquierda. V. g. si tuviese que multiplicar 847536 por 400306, colocaria los factores de esta manera:

Multiplicaria todo el multiplicando por 6; lo que me da el producto parcial 5085216; como despues del 6 hay un cero en el multiplicador, paso á multiplicar por el primer guarismo significativo que encuentro, que es el 3, y coloco este producto de modo que su primer guarismo caiga debajo del 2 del producto

```
      847536
      400307
   ---------
     5085216
   2542608
 3390144
 -----------
 339273746016
```

antecedente, esto es, corriéndole dos lugares hácia la izquierda. Como despues vuelvo á encontrar ceros, paso á multiplicar por el guarismo significativo que hay despues de ellos, que es el 4; coloco el producto tres lugares mas hácia la izquierda respecto del antecedente, porque aquí hay dos ceros; sumo despues estos productos, y saco que 847536 multiplicado por 400306 da 339273746016 por producto.

46 Las cuestiones que conducen á la operacion de multiplicar, se presentan bajo tres aspectos diferentes, que se llaman *usos* de esta operacion: 1.° *cuando se quiere hacer á un número cierto número de veces mayor*; 2.° *cuando conocido el valor de una unidad, se quiere averiguar el demuchas*; y 3.° *cuando se quieren reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior.*

Para el primer caso *se multiplica el número dado por aquel que espresa con sus unidades las veces que se le quiere hacer mayor.* V. g. si al 754 le quiero hacer 58 veces mayor, multiplicaré el 754 por 58, y tendré que el producto 43732 es un número 58 veces mayor que el 754.

Para el segundo, *se multiplica el valor de la unidad por el número de ellas.* V. g. si quiero averiguar lo que valen 372580 varas de paño á 60 reales la vara, multiplicaré el número de varas por el valor de una de ellas, que es 60 reales, y hallaré que valen 22354800 reales. Porque, por cada unidad que haya, se debe tomar una vez su valor; luego se deberá tomar tantas veces el valor de una como unidades hay. Así mismo, 457 arrobas de aceite á 96 reales valen 43872 reales; y 3574 fanegas de trigo á 85 reales valen 303790 reales.

Para el tercer caso *se multiplica el número de unidades de especie superior, por aquel número que con sus unidades espresa las unidades de especie inferior de que se compone la mayor.*

1.er *ejemp.* Quiero saber cuántos pies tienen 7 varas; como la vara es la unidad de especie superior,

y se compone de 3 pies, multiplicaré el número 7 de varas por 3, y tendré en el producto 21 los pies que hay en 7 varas.

2.° Quiero averiguar cuántos maravedíses hay en 79 doblones; para esto multiplicaré el 79 por los maravedíses que tiene un doblon, que son 2040, y sacaré 161160 maravedíses; pero es mas cómodo reducirlos primero á pesos, luego á reales y despues á maravedíses. Así, en el ejemplo propuesto veré primero cuántos pesos hay en los 79 doblones; despues los pesos que saque, veré los reales que componen; y luego este número de reales veré los maravedíses que tienen, como se ve en (A).

(A)	(B)	(C)
79 *dob.s*	75893 *varas*	4367 *quint.s*
4	3	4
316 *pesos*	227679 *pies*	17468 *arrob.s*
15	12	25
1580	455358	87340
316	227679	34936
4740 *real.s*	2732148 *pulg.s*	436700 *libras*
34	12	16
1896	5464296	26202
1422	2732148	4367
161160 *mar.s*	32785776 *líneas*	6987200 *onzas*

Los dos ejemplos (B), (C), manifiestan: el (B) el modo de reducir 75893 varas á líneas; y el (C) el modo de reducir 4367 quintales á onzas.

De la division.

47 Pasemos á la segunda operacion de disminuir, que es cuando se ha de restar el sustraendo del minuendo todas las veces que se pueda; y como se podrá quitar tantas veces como esté contenido, se dice que dividir *es averiguar cuántas veces un número contiene á otro.* La operacion se llama *division*; el número que ha de contener, se llama *dividendo*; el que ha de estar contenido, se llama *divisor*; y lo que resulta *cociente*; el dividendo y divisor juntos, se llaman *términos* de la division ó del cociente.

48 Como dividir es averiguar las veces que el divisor está contenido en el dividendo, se infiere que *multiplicando el divisor por el cociente ha de resultar el dividendo*; luego en la division *el número que multiplicado por el divisor no dé el dividendo no puede ser el cociente.*

Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se pone el dividendo, debajo una raya, y luego el divisor; ó se pone el dividendo, despues dos puntos, y luego el divisor; así, $\frac{15}{5}$ ó 15:5, indica la division de 15 por 5, y se lee: 15 *dividido por* 5; y para indicar el resultado usarémos del signo $=$; de manera que $\frac{15}{5}=3$, ó $15:5=3$, se lee: 15 *dividido por* 5 *igual* 3.

49 Tres casos pueden ocurrir en la division, á saber: *dividir un número díjito por otro díjito*; *dividir un compuesto por un díjito*; *y dividir un compuesto por otro compuesto.*

Para dividir un número díjito por otro díjito, y aun uno compuesto sólo de dos guarismos por uno díjito que sea mayor que el guarismo de especie superior del compuesto, no hay mas que saber la tabla de la multiplicacion (37); pues en este caso en averiguando el número por que se ha de multiplicar el divisor para que dé el dividendo (ó el producto inmediatamente menor), este será el cociente.

1.er *ejemp.* Quiero saber cuantas veces el 6 contiene al 2, ó cuánto es 6 dividido por 2; y como haciendo varias tentativas encuentro que el 2 se ha de multiplicar por 3 para producir 6, digo que 3 es el cociente.

2.° Si quisiera dividir 11 por 4, veria que despues de dar al cociente 2, me sobran 3; estas 3 unidades que sobran *se ponen al lado del cociente hallado, debajo se tira una raya, y debajo se pone el divisor*, en esta forma $2\frac{3}{4}$, y se lee: *dos y tres cuartos.*

Para leer todas estas espresiones, *se lee el número que está encima de la raya con los nombres numerales absolutos, y el que está debajo con los numerales partitivos, si no llega á* 10: *ó con los absolutos si llega ó pasa de* 10, *añadiendo despues la partícula* avos. Así, la espresion $3\frac{9}{17}$ se lee: *tres y nueve diez y siete avos.*

50 2.° caso. Prob. *Dividir un número compuesto por un díjito.*

Res. *Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, de modo que se correspondan en un mismo renglon; tírese entre los dos una raya de arriba abajo, y otra debajo del divisor. Hecho esto, tómese el guarismo de especie superior del dividendo, véase cuántas veces está contenido en él el divisor, y se pone este cociente debajo de la raya del divisor; si el primer guarismo del dividendo es menor que el divisor, se toma otro guarismo mas del dividendo, y para que se sepa los que se han tomado, se pone una coma, y se ve cuántas veces en aquel número de dos guarismos se contiene el divisor, conforme se ha dicho* (49), *poniendo por cociente lo que resulte. Despues se multiplica este cociente por el divisor, y se coloca el producto debajo del guarismo ó dos guarismos que se separaron en el dividendo; se tira debajo una raya, y se resta este producto del guarismo ó guarismos separados. Al lado de esta resta, ó al lado de* o *si no quedó ninguna, se baja el guarismo siguiente del dividendo, y se ve cuántas veces en la*

resta juntamente con el guarismo que se bajó, está contenido el divisor, y el número que resulte se pone en el cociente á la derecha del guarismo hallado ántes; se multiplica este segundo cociente por el divisor, se coloca el producto debajo del segundo dividendo parcial, se tira una raya, y se resta. Al lado de la resta se baja el siguiente guarismo, y así se continúa hasta que no haya en el dividendo mas guarismos que bajar, apuntando con una coma el que se baja para no equivocarse. Si al fin queda resta, se pone como se ha dicho (49), y el número que resulta debajo de la raya es el cociente.

Ejemp. Si quiero dividir 924 por 7, pondré el divisor á la derecha del dividendo, separándolos con una raya tirada de arriba abajo, y tiraré otra debajo del divisor en esta forma:

9,2,4	7
7	——
———	132
2 2	
2 1	
———	
0 1 4	
1 4	
———	
0 0	

Separo con la coma el guarismo 9 de la izquierda del dividendo, y digo: el 7 en 9 cuántas veces está contenido? veo que una vez, por lo que pongo 1 debajo de la raya del divisor; multiplico este primer cociente parcial 1 por el divisor 7, diciendo: 1 por 7 es 7, que pongo debajo del dividendo parcial 9; tiro una raya y resto 7 de 9. Al lado de la resta 2 bajo el guarismo siguiente 2 del dividendo, le apunto arriba y digo: el 7 en 22 cuántas veces está contenido? hallo que son 3, y pongo este segundo cociente parcial á la derecha del primero, le multiplico por el divisor 7, su producto 21 le pongo debajo del segundo dividendo parcial 22, y resto. Bajo al lado de la resta 1 el guarismo siguiente 4, y digo: 7 en 14 cuántas veces está contenido? veo que son 2, pongo este guarismo en el cociente á la derecha del 3, y le multiplico por el divisor 7; pongo su producto 14 debajo del tercer dividendo parcial, y le resto de él; y como no hay mas guarismos que bajar

ni queda resta, resulta que el cociente de dividir 924 por 7 es 132.

Dem. La colocacion de los dos términos es por comodidad, y las rayas se tiran para claridad; ahora, para hacer ver la exactitud de lo demas de la regla, nos contraerémos al ejemplo anterior, donde observamos que hemos dividido primeramente 9 centenas por 7, ó hemos visto 9 centenas entre 7 á cómo les toca, y hemos hallado que es á 1; pero como el 9 espresa centenas, este cociente es 1 centena, y por lo mismo despues del 1 debe haber en el cociente otros dos guarismos; en 9 centenas, no sólo habia lo necesario para que tocase á 1 centena, sino que habia algo mas, y por esto hemos multiplicado el cociente por el divisor, y le hemos restado de lo que nos servia de dividendo; á su lado hemos bajado el guarismo inmediato 2, y vemos que estas 22 son decenas, y hemos continuado diciendo: el 7 en 22 cuántas veces está contenido? ó 22 decenas entre 7 á cómo les toca? hemos hallado que es á 3, que las coloco á la derecha del 1 que habia de espresar centenas; ahora, para ver si despues de tocarles á 3 decenas quedan aun algunas decenas, se multiplica este segundo cociente por el divisor, y se resta del segundo dividendo parcial 22; la resta 1 que resulta espresa una decena, que junta con las 4 unidades que se bajan, son 14 unidades; que entre 7 les toca á 2, que pongo á la derecha del 3 que espresaba decenas; y como he visto cuánto cabe el divisor en todas las partes del dividendo, y tengo reunidos en un solo número todos los cocientes parciales, resulta (intr. ax. 3.°) que este es el cociente total. L. Q. D. H. y D.

51 Al ejecutar esta operacion se debe téner presente: 1.° *que no se puede poner de una vez en el cociente nada mas que* 9; porque si se pudiera poner á mas, lo menos seria á 10, y la decena no corresponderia al cociente parcial que se hallase, sinó al anterior, lo que daria á conocer que el anterior era menor de lo que debia.

2.° Que *cuando se baja un guarismo y en él, junto con la resta si la hay, no cabe el divisor, se debe poner o en el cociente, y se baja al instante el otro guarismo.*

3.° Que *todo número cabe en sí mismo una vez, ó lo que es lo mismo, que si se tiene que dividir un número por sí mismo, el cociente es 1.*

4.° Que *todo número dividido por la unidad da por cociente el mismo número.*

Y 5.° que o *dividido por cualquier número siempre da* o *por cociente.* Todo lo cual se ve practicado en los siguiente ejemplos.

1.°		2.°	
72,0,8,4,7	8	45,9,0,9,4	9
72	$90105\frac{7}{8}$	45	$51010\frac{4}{9}$
00 0 8		00 9	
8		9	
0 4 7		0 0 9	
4 0		9	
0 7		0 4	

52 Cuando se ha adquirido ya cierta destreza, se ejecuta la operacion con mucha brevedad, tomando del dividendo la parte que diga el divisor. V. g. si quiero dividir 45685 por 7, diré: la 7.ª parte de 4, guarismo de especie superior, no puede ser; la 7.ª parte de 45 es 6 (que será el primer guarismo del cociente), y quedan 3; que juntas con el guarismo siguiente 6 son 36, y diré: la 7.ª parte de 36 es 5, que pongo al lado del 6, y queda 1, que junta con el 8 vale 18; la 7.ª parte de 18 es 2, y quedan 4, que juntas con el guarismo siguiente 5 componen 45; la 7.ª parte de 45 es 6, que pongo al lado del 2, y quedan 3 por resta; por lo que infiero que el cociente es $6526\frac{3}{7}$.

53 3.^{er} caso. Prob. *Dividir un número compuesto por otro compuesto.*

Res. *Colóquese el divisor á la derecha del dividendo separándolos con una raya, y poniendo otra debajo del divisor segun se ha dicho en el caso anterior; despues se separan con una coma á la izquierda del dividendo tantos guarismos como tiene el divisor, ó un guarismo mas si en estos no cabe el divisor. Separados ya estos guarismos, se ve cuantas veces el primer guarismo de la izquierda del divisor está contenido en el primero del dividendo* (ó en los dos primeros si se tomó para el primer dividendo un guarismo mas de los que tenia el divisor), *y el número de veces que está contenido se pone en el cociente; se multiplica este cociente por todo el divisor, y el producto se coloca debajo del dividendo parcial, se tira una raya y se resta de él. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente* (apuntándole con la coma en el dividendo), *y se ve cuántas veces el primer guarismo del divisor está contenido en el primero* (si tiene tantos el uno como el otro) *ó dos primeros del dividendo* (si tuviese este uno mas que el divisor); *se pone este guarismo en el cociente á la derecha del primer cociente parcial, se multiplica por todo el divisor, se tira la raya y se resta. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente, y así se procede hasta que no haya mas guarismos que bajar; y si al fin queda alguna resta se pone á la derecha del cociente con una raya y el divisor debajo.*

1.^{er} *ejem.* Si quiero dividir 966 por 42, colocaré el divisor 42 á la derecha del dividendo 966, separándolos con una raya en esta forma:

96,6	42
84	——
——	23
12 6	
12 6	
——	
00 0	

Y despues de haber tirado otra debajo del divisor, separo á la izquierda del dividendo dos guarismos, y veo cuántas veces está contenido en el primero que es 9 el primero del divisor que es 4; hallo que son 2 veces, y pongo el guarismo 2 en el cociente;

ahora multiplico este cociente 2 por todo el divisor 42, y coloco el producto 84 debajo del dividendo parcial 96, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 12 bajo el guarismo siguiente 6; y como ahora tengo por segundo dividendo un número que tiene un guarismo mas que el divisor, averiguaré cuántas veces en los dos primeros de este dividendo está contenido el primero del divisor; y así, diré: el 4 en 12 cuántas veces está contenido? veo que son 3, pongo 3 en el cociente á la derecha del 2, multiplico todo el divisor por este 3, y coloco el producto 126 debajo del dividendo parcial 126, tiro una raya y resto; y como no hay mas guarismos que bajar, ni queda resta, digo que el cociente de dividir 966 por 42 es 23.

2.° *ejemp.* Si quiero averiguar cuántas veces cabe el 812 en 442635, colocaré los números como aquí se presenta:

4426,3,5,	812
4060	———
———	$545\frac{95}{812}$
0366 3	
324 8	
———	
041 5 5	
40 6 0	
———	
00 9 5	

Y despues de tiradas las rayas, separaré cuatro guarismos en el dividendo, por no ser suficientes los tres primeros para contener al divisor, y diré: 44 entre 8 les toca á 5, que pongo en el cociente; multiplico el 812 por 5, coloco el producto 4060 debajo del dividendo parcial 4426, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 366 bajo el 3; hallo que el 8 está contenido 4 veces en 36, y pongo 4 en el cociente; multiplico el 812 por 4, coloco el producto 3248 debajo del dividendo parcial 3663, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 415 bajo el 5, veo que el 8 está contenido 5 veces en 41, pongo 5 en el cociente, multiplico el 812 por 5, coloco el producto debajo del dividendo parcial, tiro la raya y resto; y como no hay mas guarismos que bajar, coloco la resta 95 como he dicho (49) y tengo que de dividir 442635 por 812 resulta $545\frac{95}{812}$.

Dem. La colocacion de los términos y las rayas, se hace por comodidad y claridad (50). Despues tomamos á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se necesitan para que esté contenido el divisor, y hallamos, contrayéndonos al primer ejemplo, que se necesitan dos guarismos, y que en ellos está contenido el divisor 2 veces, ó que 96 entre 42, que es el divisor, les toca á 2; pero como el 96 espresaba decenas, resulta que estas dos serán decenas. Hago la multiplicacion y resta, para saber si ademas de tocarles á 2 decenas queda aun algo que repartir, como sucede en efecto, pues quedan 12 que son decenas; y bajando el guarismo 6 de las unidades, he visto cuantas veces cabe el 42 en 126, y hallo 3, que como son unidades las coloco á la derecha del 2 que espresaba decenas. Hago la multiplicacion y resta para ver si quedan aun algunas unidades por repartir, y veo que no; y como todos los cocientes que han salido de dividir todas las partes del dividendo por el divisor, los tengo reunidos en un solo número, resulta (intr. ax. 3.°) que este es el cociente total. L. Q. D. H. y D.

54 Suele suceder que el cociente parcial sacado por la regla (53) es mayor de lo que corresponde, por no estar contenido todo el divisor en todo el dividendo parcial tantas veces como el primer guarismo del divisor está en el primero ó dos primeros del dividendo. Esta circunstancia (que arredra á los principiantes, y orijina toda la dificultad de la division) desaparece al instante, si se atiende á lo dicho (48); pues si el producto que resulte de multiplicar el divisor por el cociente puesto, fuese mayor que el dividendo, *está reducido á borrar dicho producto y cociente, y poner en éste una unidad menos; se procede á la multiplicacion, y si el producto es todavía mayor que el dividendo, se vuelve á borrar, y se quita otra unidad al cociente; y así se continúa hasta que encontrando un producto igual ó menor que el dividendo se ejecuta la resta; y siempre que la res-*

ta sea menor que el divisor, el cociente será el verdadero. Si la resta fuese igual ó mayor que el divisor, *se irán añadiendo unidades al cociente, hasta que venga á quedar una resta menor que el divisor.* De donde se infiere, que teniendo un poco de paciencia para hacer dos ó tres operaciones que comprueben el verdadero cociente, y ejecutando muchos ejemplos, llegarán á ponerse tan diestros que no tendrán luego que hacer ningun tanteo. Por lo mismo se ponen aquí estos dos ejemplos. 1.° Si quiero dividir 575726 por 493, los colocaré como se ve en (A).

(A)

```
575,7,2,6, | 493
493        | ———
———        | 12
0827         18
 986          7
 493         69
———           8
 3342        7 395/493
 3944
 8451
 2958
————
 03846
  4437
  6944
  3451
————
  0395
```

(B)

```
37963,1,0,4, | 6879
41274        | ————
34395        | 6
—————          552
035681          19
 34395         8 4782/6879
——————
 012860
  13758
   6879
 ——————
   59814
   61911
   55032
 ———————
   04782
```

Separo tres guarismos en el dividendo y digo: 5 entre 4 á 1 que pongo en el cociente; multiplico y resto. Al lado de la resta 82 bajo el guarismo siguiente 7 del dividendo, y digo: 8 entre 4 á 2, que pongo en el cociente y multiplico; y como el producto 986 es mayor que el dividendo parcial 827, infiero que el cociente 2 es mayor de lo que debe ser; borro,

pues, el 986 y tambien el 2, y pongo á 1 en el cociente; multiplico y resto (porque el producto 493 es menor que el dividendo). Al lado de la resta 334 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 33 entre 4 á 8, que pongo en el cociente, y multiplico; y como el producto 3944 es mayor que el dividendo 3342, le borro y tambien el 8; pongo á 7; y como el producto 3451 es aun mayor que el dividendo, los borro y pongo á 6; multiplico el divisor por este cociente 6, y como su producto 2958 es menor que el dividendo, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 384 bajo el 6, y digo: 38 entre 4 á 9; y como el producto del divisor por 9 es mayor que el dividendo, los borro y pongo á 8; multiplico y sale tambien un producto mayor; le borro y pongo á 7; multiplico y resto, lo que da la resta 395; y reuniendo ahora todos los cocientes tendré el verdadero y total en $1167\frac{395}{493}$.

2.º Si quiero dividir 37963104 por 6879, ejecutaré la operacion como se ve en (B), y saco el cociente $5518\frac{4782}{6879}$.

55 Entendido el modo de hallar el verdadero cociente, se puede ahorrar todo este trabajo, practicando estas dos reglas: 1.ª cuando el segundo guarismo del divisor sea 8 ó 9, *se considerará el primero* (al tiempo de buscar cada cociente) *como con una unidad mas.*

2.ª *Véase si en la resta que queda de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, junta con el guarismo siguiente del dividendo, cabe el segundo del divisor el mismo número de veces que el primero en el primero ó dos primeros del dividendo; y si cabe se podrá asegurar que el cociente hallado es el verdadero; si no cabe, no lo será.*

Esc. Los principiantes deben aplicar la 1.ª regla á los ejemplos anteriores, considerando en el primero (siempre que vayan á sacar el cociente) el 4 como si fuera 5: y en el segundo el 6 como si fuera 7, y verán que no escriben mas guarismos que los nece-

sarios para encontrar el verdadero cociente. Ademas deben resolver lós siguientes ejemplos.

Si quiero dividir 185975 por 395, los colocaré como aquí se ve:

Separo cuatro guarismos, y en vez de decir 18 entre 3, diré: 18 entre 4 á 4, que pongo en el cociente; multiplico todo el divisor por este 4, coloco el producto debajo del dividendo, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 279 bajo el guarismo siguiente 7, y digo: 27 entre 4 á 6, que pongo en el cociente; multiplico y resto; y como la resta 427 es mayor que el divisor, infiero que el cociente debe ser mayor de lo que le he puesto; por lo cual le borro, y borro tambien la resta y producto; pongo á 7, multiplico y resto. Al lado de la resta 32 bajo el guarismo siguiente 5, y por ser el dividendo menor que el divisor pongo 0 en el cociente; y como no hay mas guarismos que bajar, pongo la resta 325 al lado del cociente, con la raya y el divisor debajo, y resulta por cociente $470\frac{325}{395}$.

1859,7,5, | 395
1580 | ——
—— | 4~~6~~
02797 | $70\frac{325}{395}$
~~2370~~
——
~~042 7~~
276 5
——
00325

Si quiero dividir 2285473 por 3526, los colocaré comó aquí se ve:

Separo cinco guarismos y digo: 22 entre 3 á 7, y queda una, que junta con el 8 vale 18; y como 18 entre 5 (segundo guarismo del divisor) no les cabe á 7, infiero que no puedo poner 7 en el cociente; veo que 22 entre 3 dándoles á 6 sobran 4, que juntas con el 8 valen 48; y como 48 contiene al 5 mas de

2285,4,7,3, | 3526
21156 | ——
—— | $648\frac{625}{3526}$
016987
14104
——
288 3 3
282 0 8
——
006 2 5

seis veces, digo que 6 es el cociente; le pongo, multiplico y resto. Al lado de la resta 1698 bajo el 7; y continuando el mismo raciocinio evito los tanteos, y saco el cociente $648\frac{625}{3526}$.

56 La operacion de dividir se puede abreviar siempre, *haciendo la resta al mismo tiempo que la multiplicacion del divisor por el cociente parcial.* V. g. si quiero dividir 57327 por 46, los colocaré como he dicho (53) y aquí se ve:

Separaré dos guarismos en el dividendo, y diré: 4 en 5 cabe una vez, y pongo 1 en el cociente, multiplico ahora el divisor 46 por el cociente 1, y en vez de colocar este producto debajo del dividendo parcial 57, para restar despues, voy ejecutando la resta al mismo tiempo que formo el producto en esta forma: 6 por 1 es 6, de 6 á 7 va 1, que pongo debajo del 7, y continúo. 1 por 4 es 4, de 4 á 5 va 1, que pongo debajo del 5: Al lado de la resta 11 bajo el guarismo siguiente 3, y digo: 4 en 11 esta contenido 2 veces, pongo 2 en el cociente, multiplico y resto diciendo: 2 por 6 son 12, de 12 á 13 va 1, y de 13 llevo 1; 2 por 4 son 8, y 1 que llevo son 9 de 9 á 11 van 2, y de 11 llevo 1; de 11 no va nada, y pongo 0 debajo del último 1. Al lado de la resta 21 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 4 en 21 á 3; pero como sólo sobra 1 unidad, y en ella junto con el guarismo siguiente 2, no está contenido 5 veces el segundo guarismo del divisor 6, pondré sólo á 4; multiplico y resto diciendo: 4 por 6 son 24, de 24 á 32 van 8, y de 32 llevo 3; 4 por 4 son 16, y 3 son 19, de 19 á 21 van 2, y de 21 llevo 2, á 2 no va nada. Al lado de la resta 28 bajo el guarismo siguiente 7, y digo: 4 en 28 está 7 veces; pero como no sobra nada pondré sólo á 6; haré la multiplicacion y resta, diciendo: 6 por 6 son 36, de 36 á 37 va 1, y de 37 llevo 3; 6 por 4 son 24, y 3 que llevaba son

57,3,2,7,	46
11 3	
02 1 2	$1246\frac{11}{46}$
0 2 8 7	
0 1 1	

27, de 27 á 28 va 1, y de 28 llevo 2; de 2 á 2 no va nada, y pongo 0 debajo del 2; y como no hay mas guarismos que bajar, pongo la resta 11 como he dicho (46), y tengo el cociente $1246\frac{11}{46}$.

Esc. Si al ejecutar esta operacion *no se pudiese hacer la última resta, es señal de que el cociente es mayor de lo que corresponde*; y si despues de hecha la resta, resulta esta igual ó mayor que el divisor *es señal de que se ha puesto de ménos al cociente*; y en estos casos se hará la correccion necesaria.

Hé aquí mas ejemplos para ejercitarse.

1.°		2.°	
8450,3,1,7,	2987	98540,6,7,8,	54781
0476 3	$3119\frac{1864}{8987}$	43759 6	$1798\frac{44440}{54781}$
0776 1		05412 97	
37747		0482688	
01864		044440	

57 Ademas se abrevia la division cuando ambos términos ó sólo el divisor terminan en ceros. En el 1.er caso *se borran en los dos, tantos ceros como hay en el que tiene ménos, y se hace la division con lo demas que queda.* Y en el 2.° *se separan á la derecha del dividendo tantos guarismos, como ceros hay al fin del divisor, se hace la division de lo que queda á la izquierda; al lado de la resta, si queda, se baja todo lo separado, y se tiene la resta total, la que se pondrá encima de una raya y todo el divisor debajo.*

58 Los usos de la division son seis: 1.° *cuando claramente se dice que se quiere buscar las veces que un número está contenido en otro*; 2.° *cuando hay que repartir entre varias personas cierto número de cosas*; 3.° *cuando se quiere dividir un número en partes iguales, ó tomar una parte de un número, como mitad, tercio; &c.* 4.° *cuando conociendo el valor de muchas unidades, se quiere averiguar el de una*; 5.° *cuando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior*; *y* 6.° *cuando se*

quieren hallar todos los números que dividen exactamente á otro dado.

En el primer case se divide el mayor por el menor por el método espuesto. (56).

En el 2.° *se divide en abstracto el número de las cosas por el de las personas.* V. g. Un padre al morir ha dejado 8 hijos, y en hacienda, alajas, casas, &c. 7465235 reales; dividiendo el número 7465235 por el de los hijos que es 8, el cociente $933154\frac{3}{8}$ espresará los reales que corresponden á cada uno.

En el 3.° *se divide el número dado por el que espresa las partes en que se ha de dividir, ó la parte que se quiere tomar.* V. g. si quiero dividir en 7 partes iguales el número 1673, dividiré 1673 por 7, y en el cociente 239 tendré el valor de una de estas partes.

En el 4.° caso, *se divide el valor de dichas unidades por el número de ellas, y el cociente será el valor de una.* V. g. sabiendo que 35 varas de paño han costado 1505 reales; para averiguar á cómo ha costado la vara, dividiré el valor de todas las varas, que es 1505 reales, por el número de ellas 35, y el cociente 43 será el valor de cada vara de paño.

En el 5.° caso, *se divide el número de unidades de especie inferior por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior cabe en la de especie superior.* V.g. si quiero reducir 9245 maravedíses á reales dividiré los 9245 maravedíses por 34, que son los maravedíses que tiene un real, y el cociente $271\frac{31}{34}$ serán los reales que componen; pero en estos casos no se pone la resta como ántes (49), si no que se deja conservándole el nombre que tenia el dividendo de que provino; de modo que en vez de decir 271 *reales y treinta y un treinta y cuatro avos de real*, se dice 271 *reales y* 31 *maravedíses.*

Esc. Si entre las unidades que se dan y aquellas á que se quieren reducir hay otras intermedias, *se van reduciendo sucesivamente á las de especie superior inmediata hasta llegar á la que se pide.* V. g. si quiero reducir 7483506 máravedises á doblones,

dividiré primero por 34, para reducirlos á reales; los reales que resulten los divideré por 15, para reducirlos á pesos; y finalmente, estos pesos los dividiré por 4 para reducirlos á doblones; y tendré en este último cociente juntos con las restas anteriores, los doblones, pesos, reales y maravedises, que hay en el número propuesto. La operacion se ejecutará como aquí se ve:

```
maravedíses
74,8,3,5,0,6, | 34
068           |----------------
  035         | 22,0,1,0,3,rs. | 15
   106        |  70            |----------------
     4        |  101           | 14,6,7,3,ps.  | 4
              |   110          | 026           |---------
              |   0053         | 027           | 3668 ds.
              |      8         |  033
                                   1
```

y diré que en 7483506 mrs. hay 3668 doblones, 1 peso, 8 reales y 4 maravedíses.

59 Para proceder al sesto uso advertirémos, que cuando un número está contenido en otro un número exacto de veces, se llama al que contiene *múltiplo* del contenido, y al contenido *submúltiplo* ó *parte alícuota* del que contiene; cuando un número no está contenido en otro número exacto de veces, se dice que es *parte alicuanta* del continente. V. g. el 20 es múltiplo respecto del 4 y del 5; y el 4 y el 5 son submúltiplos ó partes alícuotas del 20; y 4 es parte alícuanta del 21. La parte alícuota se llama tambien *factor*, porque multiplicada por la otra produce el número de que lo es; v. g. $4 \times 5 = 20$; y como si dividimos el 20 por el 4 ó por el 5, dará cociente exacto, se infiere que *parte alícuota, factor ó divisor de un número, es cualquier otro que le divide sin dejar resta.*

Pero si consideramos el 5 y el 4, que son factores del 20, observarémos que el 5 no se puede divi-

dir exactamente por ningun otro número mas que por él mismo y por la unidad; por lo que este número, y todos los que tienen esta misma propiedad, como 2, 3, 7, 11, 13, 17, &c. se llaman números *primos ó primeros ó factores simples.* El 4, ademas de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es tambien por 2; por cuya razon este número, y todos los que son divisibles por algun otro ademas de ellos mismos y la unidad, como 6, 8, 9, 10, 12, &c., se llaman *factores compuestos.* Esto supuesto, para poder encontrar todos los factores simples y compuestos de los números, se debe saber que *todo número que termina en cero ó guarismo par es divisible por 2. Todo número* (v. g. 264) *cuyas cifras* (2, 6 y 4) *sumadas como unidades sencillas, dan* 3 *ó un múltiplo de* 3 (que aquí es 12) *es divisible por* 3.

Como todos los multiplos de 5 acaban en 0 ó en 5, *se conocerá que un número es divisible por* 5 *si acaba en* 0 *ó en* 5. Esto supuesto, para hallar los factores simples y compuestos de un número cualquiera, *se pone el número lo mas alto y hácia la izquierda del papel ó pizarra donde se ejecuta la operacion; despues se tira una raya de arriba abajo, y á la derecha de esta raya, enfrente del número propuesto, se pone el número primero menor porque sea divisible; esta division, como es sencilla, se va haciendo mentalmente* (52), *y el cociente se va poniendo debajo del número propuesto. Enfrente de este cociente se pone otra vez el mismo divisor, si es divisible por él; y sino aquel número primero menor porque sea divisible este cociente; y así se continúa hasta llegar á un cociente que sea número primo, y se dividirá por sí mismo. Despues se tira una raya á la derecha de los factores simples;* y para formar los compuestos de dos, *se multiplica cada uno de los simples por los que tenga debajo de sí, y el producto se pondrá á la derecha de la raya enfrente del factor simple porque se multiplica. Luego, se tira otra raya;* y para formar los compuestos de tres, *se multiplica cada compuesto de*

á dos por todos los simples que haya debajo del renglon en que está el compuesto de á dos; y así se procede hasta llegar al último que debe resultar en el renglon inferior é igual con el número propuesto.

1.er *ejémplo.* si quiero hallar los factores simples y compuestos del número 210, le colocaré lo mas arriba y hácia la izquierda que pueda, y tiraré la raya como aquí se ve:

210	2				
105	3	6			
35	5	10; 15	30		
7	7	14; 21; 35	42; 70; 105	210	
1					

y como el 210 termina en cero, es divisible por 2; pongo el 2 enfrente, y hago la division diciendo: la mitad de 2 es 1, que pongo debaja del 2 del 210; continúo: la mitad de 1 es 0 que pongo debajo del 1 del 210; y me queda uno, que junto con el 0 de arriba da 10; la mitad de 10 es 5, que pongo á la derecha del 0. Como el 105 no es divisible por 2, veo si es divisible por 3, diciendo: 1 y 0 es 1, y 5 son 6; y como 6 es múltiplo de 3, infiero que el 105 se puede dividir por 3, y por lo mismo coloco el 3 á su derecha, y hago la division de este modo: la 3.ª parte de 1 es 0, que no pongo y sobra 1, que junto con el 0 vale 10; la 3.ª parte de 10 es 3, que pongo debajo del 0, y queda 1, que junto con el 5 son 15; la 3.ª parte de 15 es 5, que pongo á la derecha del 3. El 35 no es ya divisible por 3, pero lo es por 5, coloco el 5 á su derecha y digo: la 5.ª parte de 35 es 7, que pongo debajo del 5, y como el 7 es *número primo* le dividiré por el mismo, diciendo: la 7.ª parte de 7 es 1, que pongo debajo del 7, y tengo todos los factores simples.

Para hallar los factores compuestos de dos simples, tiraré á la derecha de estos una raya y multiplicaré el 2 por todos los que tenga debajo de sí,

diciendo: 2 por 3 son 6, que coloco á la derecha de la raya, enfrente del 3, que es por el que he multiplicado, continúo: 2 por 5 son 10, que pongo enfrente del 5 que es por el que he multiplicado, y continúo: 2 por 7 son 14, que pongo por la misma razon enfrente del 7. Paso á multiplicar el 3 por todos los que tiene debajo, diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5 que es por el que he multiplicado; y para que no se confunda con el 10 que tengo en el mismo renglon, los separo poniendo entre ellos punto y coma; continúo diciendo: 3 por 7 son 21, que pongo enfrente del 7, al lado del 14 separándolos con punto y coma; despues paso á multiplicar el 5 por todos los que tenga debajo de sí diciendo: 5 por 7 son 35, que pongo enfrente del 7 al lado del 21. Como el 7 no tiene ninguno debajo de sí, no puedo ya sacar mas factores de á dos.

Paso á los de á tres, para lo cual tiro una raya y multiplico el 6, primer factor de á dos, por el 5 y por el 7, que son los simples que hay debajo del renglon donde se halla el 6, diciendo: 6 por 5 son 30, que pongo enfrente del 5, que es el simple por que he multiplicado; y luego 6 por 7 son 42 que pongo enfrente del 7. Paso ahora á multiplicar el 10 por el 7, que es el simple que tiene debajo de sí, diciendo: 10 por 7 son 70, que pongo enfrente del 7, al lado del 42; tiro otra raya y paso á los de á cuatro; para lo cual multiplicaré el 30 por los que haya en los simples debajo del renglon donde está el 30; y como sólo está el 7, diré: 30 por 7 son 210, que es el número dado, como debia verificarse; pues ya no hay mas factores.

Si se repite algun factor simple tambien se repetirán los compuestos; pero se evita el poner estos ejecutando la operacion como se ve en el ejemplo siguiente:

360	2					
180	2	4				
90	2		8			
45	3	6	12	24		
15	3	9	18	36	72	
5	5	10; 15	20; 30; 45	40; 60; 90	120; 180	360
1						

De las pruebas.

60 Probar una operacion *es hacer otra que dè á conocer si la primera está bien hecha.* Como en la operacion que sirve de prueba estamos tan espuestos á equivocarnos como en la primera, resulta que la mejor prueba es repetir la operacion dos ó mas veces.

Las operaciones con que se quieren comprobar las de sumar y multiplicar, son mas complicadas que ellas; por lo que no se acostumbran hacer, y esto nos escusará de esplicarlas, y sólo dirémos: que en la operacion de restar el *sustraendo sumado con la resta debe dar el minuendo, si la operacion está bien hecha.* En la division *se debe multiplicar el divisor por el cociente, al producto se le añadirá la resta (si la hay), y la suma deberá ser igual al dividendo si la operacion está bien hecha.*

Consecuencias importantes de las operaciones esplicadas.

61 Las cantidades conocidas que entran en los problemas, se llaman *datos*; y lo que se halla por medio de ellas, se llama *resultado.* Así, en la adicion los datos son los sumandos, y la suma es el resultado, &c. Vamos, pues, á ver las alteraciones que deben sufrir los resultados en variando los datos.

1.° Pues que sumar es reunir en un número el valor de muchos, resulta que *la suma crecerá ó menguará tanto como crezcan ó mengüen los sumandos; y una suma permanecerá la misma, si á un sumando se*

le añade un número cualquiera y á otro se le quita el mismo número.

2.° Como en la resta se quita el sustraendo del minuendo, se infiere que *cuanto mayor ó menor sea el minuendo, permaneciendo el mismo sustraendo, tanto mayor ó menor* (se entiende por via de suma ó resta) *será la resta y cuanto mayor ó menor sea el sustraendo, permaneciendo el mismo minuendo, tanto menor ó mayor será la resta*; lo que manifiesta que la resta puede crecer ó aumentando el minuendo ó disminuyendo el sustraendo; y puede menguar disminuyendo el minuendo ó aumentando el sustraendo; ó lo que es lo mismo, á la resta le sucede lo mismo que al minuendo, y lo contrario que al sustraendo; *y una resta no se alterará ó permanecerá la misma, añadiendo ó quitando una misma cantidad al minuendo y sustraendo.*

3.° Pues que multiplicar es tomar tantas veces el multiplicando como unidades tiene el multiplicador, resulta que *cualquiera de los factores que crezca ó mengüe, debe causar incremento ó decremento en el producto. Si el multiplicando se hiciese el duplo, el triplo, &c. de lo que era* (permaneciendo el multiplicador el mismo), *el producto deberá ser el duplo, el triplo, &c. del que se sacó ántes. Si se hiciese la mitad, tercera, cuarta, &c. parte* (quedando uno mismo el multiplicador), *el producto será la mitad, tercera, cuarta, &c. parte del que se tenia ántes.*

Lo mismo decimos respecto del multiplicador, permaneciendo el mismo el multiplicador; de donde se infiere que *un producto permanecerá el mismo si un factor se parte por el mismo número que se multiplique el otro.*

4.° Hemos visto que dividir es averiguar las veces que el divisor está contenido en el dividendo, ó quitar aquel de éste todas las veces que se pueda; luego *si el dividendo crece ó mengua, deberá crecer ó menguar el cociente; y si crece ó mengua el divisor, deberá menguar ó crecer el cociente.* Esto es en

general; *pero si el dividendo se hace el duplo, el triplo, &c.* (quedando uno mismo el divisor), *el cociente será el duplo, el triplo, &c. de lo que era ántes; y si el dividendo se hace la mitad, tercera parte, &c. el cociente será la mitad, tercera parte, &c. de lo que era ántes. Si el divisor se hace el duplo, el triplo, &c.* (quedando uno mismo el dividendo), *el cociente será la mitad, tercera parte, &c. de lo que era ántes*; pues para cada unidad que les tocase ántes, habrá ahora dos, tres, &c. entre que repartirla; y *si el divisor se hiciese la mitad, tercera parte, &c. el cociente será el duplo, el triplo, &c. de lo que era ántes*; pues para cada dos, tres, &c. unidades que les tocase ántes, no habrá ahora mas de uno entre que repartirlas. De donde se infiere que *un cociente no se altera aunque se multipliquen ó partan los dos términos de la division por un mismo número.* Porque lo que aumenta ó disminuye por razon del dividendo, lo disminuye ó aumenta por razon del divisor.

De los quebrados ó fracciones; de su espresion, reduccion á un comun denominador, y simplificacion.

62 Hemos dicho (15) que quebrados *son aquellos números que espresan partes de la unidad.* Para formarse una idea exacta del quebrado, es necesario atender al número de partes que se toman de la unidad, que se llama *numerador* (porque las cuenta ó numera), y á la clase de partes que se toman, esto es, en cuantas partes está dividida la unidad, que se llama *denominador* (porque da nombre al quebrado) V. g. en el quebrado *tres cuartos* ó *tres cuartas partes de una unidad*, como una manzana, una naranja, &c. el numerador es *tres*, y el denominador *cuatro*. El numerador y denominador juntos, se llaman *términos* del quebrado.

63 Teor. *Todo quebrado es una division indicada del numerador por el denominador.*

Espl. Si tenemos que dividir 11 manzanas entre 4, dará el cociente 2, y 3 de resta, que se han de repartir entre los mismos 4; pues vamos á demostrar que repartir estas 3 manzanas entre 4, equivale á tomar tres cuartas partes de una manzana sola.

Dem. Para esto, lo mas natural es dividir cada manzana en cuatro partes iguales, y dar á cada uno una de estas cuartas partes; pero como las unidades ó manzanas son iguales, en lugar de dar á cada uno una cuarta parte de la primera, otra de la segunda y otra de la tercera, le podrémos dar tres de la primera, ó de cualquiera de ellas, que era L. Q. D. D.

Por esta razon se escriben y leen los quebrados del modo dicho (49); v. g. el quebrado anterior se escribe $\frac{3}{4}$, y el quebrado $\frac{19}{24}$, se lee: *diez y nueve veinticuatro avos.* Como el numerador denota las partes que se toman de la unidad, y el denominador en cuántas se considera dividida la misma unidad, ó cuántas componen una unidad, se infiere que cuando el numerador sea igual al denominador, el quebrado equivaldrá á la unidad, y así tendrémos que $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\frac{7}{7}=$ &c. &c.

En este caso se dice que *la unidad se ha puesto en forma de quebrado*; y cuando el numerador sea mayor que el denominador, el quebrado se llama *impropio.* V. g. $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{5}$, &c. &c.

64 Teor. *Si una unidad se divide en un número cualquiera 3 v. g. de partes iguales, y la misma unidad se divide en otro número 5 de partes iguales, cada parte que resulte de dividirla en 5, será menor que la que resulte de dividirla en 3; y si se dividiera en 6 que es duplo de 3, cada parte que resulte de dividirla en 6, será la mitad de la que resultó dividiéndola en 3.*

Dem. Estando la unidad en el primer caso dividida en tres partes, equivaldrá al conjunto de ellas; y por la misma razon la misma unidad equivaldrá en el segundo caso al conjunto de las cinco partes; luego (intr. ax. 5.°) el conjunto de las tres partes pri-

meras equivaldrá al conjunto de las cinco segundas; luego si se necesitan 5 segundas para componer 3 primeras, no bastarán 3 segundas para componer 3 primeras; luego cada segunda será menor que cada primera. L. 1.º Q. D. D.

Cuando se divida en 6, tendrémos, discurriendo del mismo modo, que las tres partes primeras equivaldrán al conjunto de las 6 segundas; luego si se necesitan 6 segundas para componer 3 primeras, cada 2 segundas compondrán 1 primera; luego cada segunda será la mitad de cada primera. L. 2.º Q. D. D.

65 Teor. *Si permaneciendo uno mismo el denominador de un quebrado, aumenta ó disminuye su numerador, aumentará ó disminuirá del mismo modo el quebrado; y si aumenta por via de multiplicacion ó disminuye por via de division, lo hará del mismo modo el quebrado.*

Dem. Por no alterarse el denominador, no se altera el valor de cada parte; luego cuando se tomen mas partes, que es cuando crece el numerador, se tendrá un quebrado mayor; y cuando se tomen ménos, que es cuando disminuye el numerador, se tendrá un quebrado menor. L. 1.º Q. D. D.

Si el número de partes que se tomó, fue el duplo, el triplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, será el duplo, el triplo, &c.; y si fue el subduplo, el subtriplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, lo será igualmente. L. 2.º Q. D. D.

Esc. Hé aquí quebrados con esta condicion

$\frac{8}{17}$, $\frac{9}{17}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{16}{17}$, $\frac{4}{17}$;

y manifiestan que de quebrados que tienen un mismo denominador, *aquel es mayor que tiene mayor numerador*; y que para multiplicar ó dividir un quebrado por un número cualquiera, basta *multiplicar ó dividir su numerador por dicho número.*

66 Teor. *Si permaneciendo uno mismo el numerador de un quebrado, aumenta ó disminuye su denominador, disminuirá ó aumentará el quebrado. Si el denominador aumenta por via de multiplicacion, el*

quebrado disminuirá por via de division; y si el denominador disminuye por via de division, el quebrado aumentará por via de multiplicacion.

Dem. Como el numerador permanece el mismo, se toma siempre un mismo número de partes; luego el valor del quebrado será mayor ó menor, segun lo sean las partes que esprese; pero miéntras mayor sea el número de partes en que se divida una unidad cualquiera, será (64) menor el valor de cada una; luego miéntras mayor sea el denominador, será menor el valor de cada parte, y por consiguiente el valor de un número cualquiera de ellas. L. 1.° Q. D. D.

Si el denominador se hiciese dos ó tres &c. veces mayor, el valor de cada parte se haria (64) dos ó tres &c. veces menor; luego un número cualquiera de ellas será tambien dos ó tres &c. veces menor que lo que era ántes. Si el denominador disminuye por via de division, entonces el valor de cada parte aumentará por via de multiplicacion. L. 2.° Q. D. D.

Esc. Hé aquí quebrados que satisfacen á estas condiciones $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{8}$; y manifiestan que de quebrados que tienen un mismo numerador, *es mayor el que tiene menor denominador, y al contrario*; y que para multiplicar ó dividir un quebrado por un número cualquiera, basta *dividir ó multiplicar su denominador por dicho número.*

Cor. De aquí se sigue que *para multiplicar un quebrado por su denominador basta suprimir este, y el producto será igual al numerador.*

Así, $\frac{5}{8} \times 8 = 5$, $\frac{6}{11} \times 11 = 6$, $\frac{8}{13} \times 13 = 8$, &c. &c.

67 Teor. *Un quebrado no se altera, aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.*

Dem. Cuando se multiplican ambos términos por un mismo número, tenemos que con multiplicar el numerador, se hace al quebrado tantas veces mayor (65) como unidades tiene el número porque se multiplica; pero con multiplicar el denominador por el mismo número, se le hace este mismo número de ve-

ces menor (66); luego no se altera su valor ó queda conforme estaba. L. 1.° Q. D. D.

Si se dividen por un mismo número, con dividir el numerador hacemos el quebrado tantas veces menor como unidades tiene el número porque se divide (65); y con dividir su denominador por el mismo número, se le hace el mismo número de veces mayor (66); luego queda conforme estaba. L. 2.° Q. D. D.

Esc. Hé aquí quebrados iguales que satisfacen al teorema $\frac{8}{14}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}=$ &c. y es digna de notarse la conformidad de estos resultados con los deducidos para la division (61, 4.°).

68 En la primera parte del teorema anterior se funda *la reduccion de los quebrados á un comun denominador*; y en la segunda su *simplificacion*.

Cuando dos ó mas quebrados tienen un mismo denominador, se dice que le tienen *comun*; muchas veces se necesita que le tengan, y para conseguirlo *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas*. En este caso no se altera el valor de ningun quebrado, porque sus dos términos se multiplican por un mismo número; y sale el mismo denominador, porque resulta de la multiplicacion de los denominadores de todos los quebrados. V. g. Si quiero reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$, los pondré

como aquí se ve: $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3}, & \frac{5}{7} \\ \frac{14}{21}, & \frac{15}{21} \end{array} \right.$

Multiplicaré los dos términos del $\frac{2}{3}$ por 7, que es el denominador del otro quebrado, diciendo: 2 por 7 son 14, que pongo por numerador del nuevo quebrado, debajo de su correspondiente $\frac{2}{3}$; tiraré la raya y diré: 3 por 7 son 21, que pongo debajo de la raya. Paso al segundo quebrado $\frac{5}{7}$ y digo: 5 por 3 son 15, que pongo debajo del $\frac{5}{7}$; tiro la raya y despues pongo debajo 21, producto de 3 por 7; con lo que tengo los quebrados $\frac{14}{21}$, $\frac{15}{21}$, que son iguales cada uno con su correspondiente y tienen un mismo denominador.

Si los quebrados fuesen $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, multiplicaría los dos términos del primero $\frac{5}{6}$ por 10, producto de 2 por 5, que son los denominadores de los demas, y tendria que el primer quebrado se convertiria en $\frac{50}{60}$; pasaria al segundo $\frac{1}{2}$, cuyos términos los multiplicaria por 30, producto de 6 y 5 denominadores de los demas, y se convertiria en $\frac{30}{60}$;
y luego los dos términos del tercero $\frac{4}{5}$, los multiplicaria por 12, producto de 6 por 2, denominadores de los demas, lo que da $\frac{48}{60}$;
con lo que tengo los tres quebrados $\frac{50}{60}$, $\frac{30}{60}$, $\frac{48}{60}$, que son iguales con los primitivos y tienen un mismo denominador.

Como el denominador comun resulta de la multiplicacion de todos los denominadores, no se necesita *hallar mas que el del primero, y ponerle á los demas cuando se ha puesto el numerador que les corresponde.*

$$\text{Ejemplo.}\left\{\begin{array}{l} \quad\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{3} \\ \text{dan } \frac{72}{120},\ \frac{60}{120},\ \frac{90}{120},\ \frac{40}{120} \end{array}\right.$$

69 Esta operacion convierte los quebrados en otros de igual valor; pero mas complicados; y así, solo se ejecuta como ausiliar de otras; pero la que se debe hacer en todos los resultados donde haya quebrados, es *simplificarlos*. Se dice que se simplifica un quebrado *cuando se convierte en otro de igual valor, y cuyos términos son menores.*

Para esto, se dividen sus dos términos por 2 todas las veces que se pueda; luego por 3, y por los demas números primos, lo cual se conoce por lo dicho (59). Así, si quiero simplificar el quebrado $\frac{72}{120}$; veo que sus dos terminos se pueden dividir por 2; lo hago y tengo $\frac{36}{60}$, que es igual con $\frac{72}{120}$, y que se puede aun simplificar por 2; lo hago y tengo $\frac{18}{30}$, que aun se puede simplificar por 2; lo hago y tengo $\frac{9}{15}$, que no se puede simplificar por 2, pero si por 3 (§ 59); lo hago y tengo $\frac{3}{5}$, que es igual con el $\frac{72}{120}$ que se nos dió. En efecto, el $\frac{72}{120}$ es el que provino (en el ejem-

plo de ántes) del $\frac{3}{5}$, al reducir los quebrados á un mismo denominador; y como ahora deshacemos lo que ántes hicimos, ha de resultar lo mismo que habia.

Los principiantes deben simplificar todos los puestos anteriormente, como se ve en el que aquí se presenta.

$$\frac{9900}{13860}=\frac{4950}{6930}=\frac{2475}{3465}=\frac{825}{1155}=\frac{275}{385}=\frac{55}{77}=\frac{5}{7}.$$

Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.

70 Los quebrados tambien se *suman, restan, multiplican* y *parten.*

Para sumarlos *se reducen á un mismo denominador*, (sino le tienen); *despues se suman los numeradores; á esta suma se le pone por denominador el denominador comun; y si este quebrado es impropio, se divide el numerador por el denominador para sacar los enteros que contenga, y se simplifica si se puede.*

Si quiero sumar $\frac{3}{4}$ con $\frac{2}{5}$, los reduciré á un comun denominador (68), y se convertirán en $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$; despues sumaré los numeradores 15 y 8, y á la suma 23 le pondré por denominador el 20, que es el comun, y la suma será $\frac{23}{20}$; que sacando los enteros será $1\frac{3}{20}$.

La operacion se indica así:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}.$$

Aplicando la regla á estos ejemplos se hallará

1.° $\frac{3}{5}+\frac{2}{9}+\frac{4}{7}=\frac{189}{315}+\frac{70}{315}+\frac{180}{315}=\frac{439}{315}=1\frac{124}{315}$;

2.° $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=\frac{60}{90}+\frac{72}{90}+\frac{75}{90}=\frac{207}{90}=2\frac{27}{90}=2\frac{9}{30}=2\frac{3}{10}$

Dem. Se reducen á un comun denominador, porque no son homojéneos si no le tienen; despues se suman los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y á esta suma se le pone por denominador el comun, para saber el nombre de aquellas partes. La simplificacion que despues se hace, es porque en todas las operaciones se deben presentar los resultados con la mayor sencillez. L. Q. D. D.

71 Al sumar quebrados pueden ocurrir tres casos: *sumar quebrados con quebrados*, que es lo que acabamos de ejecutar; *sumar un entero con un quebrado*;

y sumar números mistos con números mistos.

La cuestion que conduce á sumar un entero con un quebrado, se presenta cuando se tiene un número misto, tal como $4\frac{3}{5}$, y se quiere saber cuántos quintos compone el entero junto con el quebrado. En este caso, se dice que *se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña*; para lo cual *se multiplica el entero por el denominador del quebrado; á esto se añade el numerador; y á la suma se le pone por denominador el denominador del quebrado.* De manera que para aplicarlo á $7\frac{3}{5}$, multiplicaré el 7 por el 5, al producto 35 le añadiré el numerador 3 del quebrado, y á la suma 38 le pondré por denominador el 5 del quebrado, y tendré en $\frac{38}{5}$ ejecutada la operacion que se me pedia. Porque en este caso cada unidad vale cinco partes; luego 7 unidades valdrán siete veces cinco ó 35 partes, y las 3 que se tenian serán 38 de estas partes, esto es, 38 quintas partes ó $\frac{38}{5}$, que es L. Q. D. D.

Del mismo modo se tiene $14\frac{5}{8}=\frac{117}{8}$; $12\frac{7}{11}=\frac{139}{11}$.

72 Para sumar números mistos con números mistos, *se suman los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros, cuidando de sumar con estos los que resulten de la suma de los quebrados, y se simplifica si se puede.*

1.^er^ *ej.* Si quiero sumar $45\frac{3}{7}$ con $27\frac{4}{7}$ y con $6\frac{5}{7}$, los pondré los unos debajo de los otros en esta forma:

Como los quebrados tienen un mismo denominador: sumaré los numeradores, pondré á esta suma el denominador comun, y saco de la suma de los quebrados $\frac{12}{7}$; pero en $\frac{12}{7}$ hay un entero y $\frac{5}{7}$, borro el $\frac{12}{7}$; y pongo debajo el $\frac{5}{7}$; el 1 le coloco sobre los enteros, separándole con una media luna, para que se conozca que ha provenido de la suma de los quebrados, sumo despues los enteros y saco 79; por lo que la suma pedida es $79\frac{5}{7}$.

$$\begin{array}{r} (1 \\ \hline 45\frac{3}{7} \\ 27\frac{4}{7} \\ 6\frac{5}{7} \\ \hline \cancel{12} \\ 79\,\overline{\cancel{7}} \\ \frac{5}{7} \end{array}$$

2.º *ej.* Si quiero sumar los números $47\frac{2}{5}$, $9\frac{1}{3}$ y

$138\frac{3}{4}$, primero reduciré los quebrados á un comun denominador, y ejecutaré la operacion como aquí se ve: y saco la suma $195\frac{29}{60}$

(1

$$\begin{array}{rl} 47\frac{2}{5} \ldots & \frac{24}{60} \\ 9\frac{1}{3} \ldots & \frac{20}{60} \\ 138\frac{3}{4} \ldots & \frac{45}{60} \\ \hline & 89 \\ 195 & \overline{60} \\ & \frac{29}{60} \end{array}$$

73 Para restar quebrados *se reducen á un comun denominador* (si no le tienen); *despues se restan los numeradores ; y á la resta se le pone por denominador el denominador comun, y se simplifica si se puede.*

1.er ej. Si quiero restar $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$, los reduciré á un comun denominador (68), y se convertirán en $\frac{8}{20}$ y $\frac{15}{20}$; restando el 8 numerador del quebrado $\frac{8}{20}$ correspondiente al sustraendo $\frac{2}{5}$, del 15 numerador del $\frac{15}{20}$ correspondiente al minuendo $\frac{3}{4}$, y poniendo á la diferencia 7 el denominador comun 20, tendré la resta $\frac{7}{20}$, que no se puede simplificar.

La operacion se indica así: $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

2.° $\frac{13}{15}-\frac{5}{9}=\frac{117}{135}-\frac{75}{135}=\frac{42}{135}=\frac{14}{45}$.

Dem. Se reducen á un comun denominador, porque en la resta los datos deben ser homojéneos; despues se han de restar los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y finalmente se ha de poner á la resta el denominador comun, porque es el que da nombre al quebrado. L. Q. D. D.

74 Al restar quebrados pueden ocurrir tres casos: *restar un quebrado de otro*, que es lo que se acaba de hacer; *restar un quebrado de un entero*; y *restar un número misto de otro número misto.*

Para restar un quebrado de un entero, *se le quita al entero una unidad ; al lado de este entero, despues de rebajada la unidad, se pone un quebrado cuyo numerador es igual á la diferencia que hay entre el denominador y el numerador del quebrado dado, y el denominador es el mismo que el del quebrado que se da; con lo que está hecha la resta.*

Aplicando esta regla á los ejemplos siguientes, se encontrarán los resultados que ellos manifiestan.

1.° $8-\frac{3}{5}=7\frac{2}{5}$; 2.° $14-\frac{2}{9}=13\frac{7}{9}$; 3.° $29-\frac{14}{23}=28\frac{9}{23}$;

porque haciendo en todos una descomposicion semejante á esta $8-\frac{3}{5}=7+\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=7+\frac{2}{5}=7\frac{2}{5}$, nos resulta L. Q. D. D.

75 Para restar un número misto de otro *se resta el quebrado del quebrado, y el entero del entero.* Si despues de reducidos á un mismo denominador, si no le tienen, el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo para poder restar *se toma una unidad del minuendo, la cual se reduce á la especie del quebrado que le acompaña* (lo que se consigue sumando el numerador del quebrado con el denominador, y á esto poniendo por denominador el comun); *de este quebrado que será impropio, se resta el del sustraendo, y luego al ejecutar la resta con los enteros, se debe advertir que al minuendo se le ha quitado una unidad.*

1.er *ejemp.* Si quiero restar $18\frac{5}{7}$ de $33\frac{8}{9}$, los colocaré como aquí se ve: reduciré á un comun denominador los quebrados; y como sale el del sustraendo menor que el del minuendo, paso á restar el quebrado del quebrado y el entero del entero, y saco $15\frac{11}{63}$.

$$\begin{array}{ll} 33\frac{8}{9}\ldots\ldots & \frac{56}{63} \\ 18\frac{5}{7}\ldots\ldots & \frac{45}{63} \\ \hline 15 & \frac{11}{63} \end{array}$$

2.° *ej.* Si quisiera restar $24\frac{7}{8}$ de $45\frac{6}{11}$, los colocaria como aquí se ve: reduciendo los quebrados á un comun denominador, sale menor el del minuendo, tomo una unidad del entero, que en este caso vale $\frac{88}{88}$, y sumada con los $\frac{48}{88}$ me da $\frac{136}{88}$; paso depues á la resta considerando al 5 del 45 como 4, y tengo por último $20\frac{59}{88}$.

$$\begin{array}{lll} 45\frac{6}{11}\ldots & \frac{48}{88}\ldots & \frac{136}{88} \\ 24\frac{7}{8}\ldots & \frac{77}{88}\ldots & \frac{77}{88} \\ \hline 20 & & \frac{59}{88} \end{array}$$

76 Para multiplicar un quebrado por otro *se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador*, y se simplifica. V. g. si quiero multiplicar $\frac{2}{5}$ por $\frac{4}{7}$ diré: 2 por 4 son 8; 5 por 7 son 35; poniendo por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el de los denominadores, tendré en $\frac{8}{35}$ el producto pedido.

Dem. Porque si tuviera que multiplicar el $\frac{2}{5}$ por 4, estaba reducida la operacion (65) á multiplicar su numerador por 4; y en este caso el producto seria $\frac{8}{5}$; pero de multiplicar el $\frac{2}{5}$ por un número siete veces menor que 4, esto es por $\frac{4}{7}$, ha de resultar un producto (61, 3.°) siete veces menor que $\frac{8}{5}$; y como esto se consigue (66) multiplicando su denominador por 7, resulta ejecutándolo, que $\frac{8}{35}$ es el producto verdadero. L. Q. D. D.

Del mismo modo $\frac{7}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$; $\frac{8}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{40}{90}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$.

77 Al multiplicar quebrados pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un quebrado por otro*, que es lo que acabamos de esplicar; *multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero*; y *multiplicar un número misto por otro misto.*

Para multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, *se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado, y se simplifica si se puede.*

1.er *ej.* Si quiero multiplicar 4 por $\frac{5}{7}$, multiplicaré el 4 por 5, al producto 20 le pondré por denominador el denominador 7 del quebrado, y tendré que el producto será $\frac{20}{7}$; que sacando los enteros se convierte en $2\frac{6}{7}$.

La operacion se indica así: $4\times\frac{5}{7}=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}$.

Del mismo modo $7\times\frac{3}{14}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

Dem. Esta regla está fundada en lo dicho (65 esc.). y tambien se deduce del caso anterior, poniendo al entero la unidad por denominador.

78 Para multiplicar un número misto por otro misto, *se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña en cada factor, y despues se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.* V. g. Si quiero multiplicar $3\frac{2}{5}$ por $2\frac{4}{7}$, reduciré en ambos factores el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que multiplicar $\frac{17}{5}$ por $\frac{18}{7}$; y ejecutando la operacion (76) tendré

$3\frac{2}{5}\times 2\frac{4}{7}=\frac{17}{5}\times\frac{18}{7}=\frac{306}{35}=8\frac{26}{35}$.

Del mismo modo $28\frac{8}{9}\times24\frac{3}{4}=\frac{260}{9}\times\frac{99}{4}=\frac{25740}{36}=\frac{12870}{18}=\frac{6435}{9}=\frac{2145}{3}=715$.

79 Para dividir un quebrado por otro, *se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y este será el numerador del cociente: y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y este producto será el denominador del cociente, y se simplifica.* V. g. Si quiero dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{7}$, multiplicaré el numerador 3 del dividendo por el denominador 7 del divisor, y el producto 21 será el numerador del cociente; despues multiplicaré el denominador 4 del dividendo por el numerador 2 del divisor, y el producto 8 será el denominador del cociente, el cual será $\frac{21}{8}$ ó $2\frac{5}{8}$.

Del mismo modo $\frac{4}{9}:\frac{8}{15}=\frac{60}{72}=\frac{30}{36}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$.

Dem. Porque si solo tuviese que dividir el $\frac{3}{4}$ por 2 estaba reducida la operacion (66) á multipicar su denominador por 2; de manera que $\frac{3}{8}$ seria el cociente; luego de dividir el $\frac{3}{4}$ por un número siete veces menor que 2, esto es por $\frac{2}{7}$, ha de resultar (61, 4.°) un cociente siete veces mayor que $\frac{3}{8}$; y como esto se consigue (65) multiplicando su numerador 3 por 7, resulta, ejecutándolo, que el verdadero cociente será $\frac{21}{8}$, ó lo que es lo mismo, $\frac{3}{4}:\frac{2}{7}=\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}$, que era L. Q. D. D.

80 Al dividir quebrados pueden ocurrir cuatro casos: *dividir un quebrado por otro*, que es lo que se acaba de hacer; *dividir un entero por un quebrado; dividir un quebrado por un entero*; y *dividir un número misto por otro misto.*

Para dividir un entero por un quebrado; *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á este producto se le pone por denominador el numerador del quebrado, y se simplifica si se puede.*

V. g. si quiero dividir 7 por $\frac{2}{5}$, multiplicaré el entero 7 por el denominador 5, y tendré 35; á este producto le pondré por denominador el numerador 2 del quebrado, y tendré $\frac{35}{2}$, ó sacando los enteros $17\frac{1}{2}$.

Del mismo modo $9:\frac{6}{7}=\frac{63}{6}=10\frac{3}{6}=10\frac{1}{2}$.

81 Para dividir un quebrado por un entero *se multiplica el denominador del quebrado por el entero, y queda hecha la division.*

V. g. si quiero dividir $\frac{3}{5}$ por 6, multiplicaré el denominador 5 por el entero 6, y tendré por cociente $\frac{3}{30}$, ó $\frac{1}{10}$ despues de simplificado.

Del mismo modo $\frac{6}{13}:4=\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$; $\frac{15}{17}:9=\frac{15}{153}=\frac{5}{51}$.

Dem. Poniendo, en este caso y el anterior, al entero la unidad por denominador, la demostracion se reduce á la dada (79), ó se puede deducir de lo dicho (61, 4.° y 66) esc.

82 Para dividir un número misto por otro misto *se reduce cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y despues se divide como un quebrado por otro.*

V. g. quiero dividir $5\frac{2}{3}$ por $2\frac{5}{7}$; primero reduciré cada entero á la especie de su quebrado, y tendré que dividir $\frac{17}{3}$ por $\frac{19}{7}$; que (79) dará $\frac{17}{3}:\frac{19}{7}=\frac{119}{57}=2\frac{5}{57}$.

Del mismo modo $9\frac{5}{7}:4\frac{6}{11}=\frac{68}{7}:\frac{50}{11}=\frac{748}{350}=\frac{374}{175}=2\frac{24}{175}$.

Esc. Ademas puede ocurrir el dividir un quebrado ó un entero por un número misto, y al contrario; *pero reduciendo el entero á la especie del quebrado, se tienen los casos anteriores*, que se practican como se ve en estos ejemplos.

1.° $\frac{3}{7}:2\frac{4}{5}=\frac{3}{7}:\frac{14}{5}=\frac{15}{98}$;

2.° $9:5\frac{3}{4}=9:\frac{23}{4}=\frac{36}{23}=1\frac{13}{23}$;

3.° $5\frac{3}{7}:\frac{4}{9}=\frac{38}{7}:\frac{4}{9}=\frac{342}{28}=\frac{171}{14}=12\frac{3}{14}$;

4.° $6\frac{2}{3}:5$ $\frac{20}{3}:5=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

De la valuacion de los quebrados.

83 Valuar un quebrado *es hallar su valor en unidades de especie inferior á la que se refiere.* V. g. en $\frac{1}{3}$ de vara no hay ninguna vara; pero como la vara tiene 3 pies, 1 pie será la tercera parte de la vara, y por lo mismo (intr. ax. 5.°) $\frac{1}{3}$ de vara = 1 pie, y está valuado el quebrado.

Para valuar un quebrado, *se multiplica el numerador por el número que espresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, está contenida en aquella á que se refiere el quebrado, y esto se parte por el denominador; si de la division resulta un número misto, y hay todavía unidades de especie inferior, se hace con el quebrado lo mismo; y así se continúa hasta que no haya mas unidades de especie inferior; en cuyo caso si queda todavía quebrado, se desprecia si el numerador no llega á ser la mitad del denominador: y se añade en vez del quebrado una unidad á las unidades anteriores, si el numerador llega ó pasa de la mitad del denominador.*

Así, si quiero saber cuanto valen $\frac{3}{7}$ de doblon, multiplicaré el numerador 3 por 4, que son los pesos que tiene el doblon, y dividiré el producto 12 por 7, lo que da 1 peso y $\frac{5}{7}$ de peso. Para averiguar los reales que hay en $\frac{5}{7}$ de peso, multiplicaré el numerador 5 por 15, que son los reales que contiene un peso, y dividiré el producto 75 por 7, y tendré 10 reales y $\frac{5}{7}$ de real; para averiguar los maravedíses que hay en $\frac{5}{7}$ de real, multiplicaré el numerador 5 por 34, que son los maravedíses que tiene un real, y dividiré el producto 170 por 7, y tendré 24 maravedíses y $\frac{2}{7}$ de maravedí; que como no hay unidad inferior al maravedi, y el numerador 2 no es la mitad del denominador 7, le desprecio: y tengo que los $\frac{3}{7}$ de doblon valen 1 peso, 10 reales y 24 maravedíses.

Dem. La razon de esto es que $\frac{3}{7}$ de doblon es lo mismo (63) que 3 doblones repartidos entre 7; y como no les toca á doblon, se reducen á pesos, estos á reales, y los reales á maravedíses, para ver á cómo les toca en estas unidades de especie inferior.

De los quebrados ó fracciones decimales.

84 La teoría de los quebrados acabada de esplicar, embaraza mucho los cálculos, en razon de la ninguna ley que siguen los denominadores, que van

variando en cada quebrado. Para evitar este inconveniente, y facilitar y uniformar todas las operaciones, se han inventado las *fracciones decimales*; las que al mismo tiempo que son un caso particular de los quebrados comunes, llenan todos los objetos mencionados.

Son, pues, las decimales, *unos quebrados que tienen por denominador* 10, 100, 1000, *&c. y en general la unidad seguida de ceros.* Para formarnos una idea exacta de las decimales, concebirémos dividida la unidad en diez partes iguales, que se llaman *décimas*; concibiendo dividida cada décima en diez partes iguales, la unidad tendrá ciento, y por lo mismo se llaman *centésimas* partes de la unidad; concibiendo cada centésima dividida en diez partes, estas serán *milésimas* de la unidad; y continuando dividiendo en otras diez cada una que vaya saliendo, resultarán las *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, *diezmillonésimas*, *cienmillonésimas*, *milmillonésimas*, *diezmilmillonésimas*, &c.

Por la uniformidad de los denominadores, y la ley que sigue cada parte de ir siendo diez veces menor, no se escribe el denominador de estos quebrados, sino que *se ponen á la derecha de las unidades las décimas, á la derecha de estas las centésimas, despues las milésimas, luego las diezmilésimas, cienmilésimas, &c. Y para conocer el guarismo que espresa las unidades, se pone entre él y las décimas una coma; y si no hay unidades, se pone* 0 *ántes de la coma, para que ocupe el lugar de las unidades.* V. g. si quiero espresar *cuarenta y cinco enteros y seis décimas*, escribiré así: 45,6; y la coma da á entender que el guarismo 5 espresa las unidades, y el 6 las décimas; si solo hubiera querido escribir *seis décimas*, hubiera puesto 0 en lugar de las unidades, y tendria escritas las seis décimas de este modo: 0,6.

Si se quiere espresar el denominador, se puede poner $\frac{6}{10}$ en vez de 0,6, y $45\frac{6}{10}$ en vez de 45,6; donde se debe advertir que la coma hace oficios de

denominador, y que cuando se quiera espresar este, *se pondrá la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hay despues de la coma.* Por ejemplo

$$3,507=3\tfrac{507}{1000},\ \text{y}\ 0,0039=\tfrac{39}{10000}.$$

85 Un número que lleva enteros y decimales, es un verdadero número misto; y así, para leerle, se leerá primero el entero (13), y luego los guarismos decimales del mismo modo, pronunciando despues de estas la denominacion que les corresponde: la cual si no se conoce al golpe por haber muchos guarismos decimales, se averigua diciendo desde la coma á la derecha, en el primer lugar décimas; en el segundo céntésimas, y así sucesivamente, hasta el último guarismo, cuyo nombre se apunta si es complicado el número. Para que no se confundan las comas de la division de periodos con la de las decimales, se hace la coma mayor que las otras. Así, si quisiera leer el

número $7056403274,3509053405703364$,

averiguaria la especie de unidades del último guarismo 4, y hallaría ser *diezmilbillonésimas.* Despues le prepararé (13) en esta forma:

$$7,056_{1}403,274,3,509_{2}053,405_{1}703,364;$$

y se lee así: *siete mil cincuenta y seis millones, cuatrocientos tres mil, doscientos setenta* y *cuatro* unidades ó enteros: *tres mil quinientos nueve billones, cincuenta y tres mil cuatrocientos cinco millones, setecientos tres mil trescientas sesenta y cuatro diezmilbillonésimas.*

86 El valor de las decimales no se altera *cuando se ponen ó quitan ceros á continuacion de los guarismos significativos.*

V. g. $0,7=0,70=0,700=0,7000=0,70000$ &c.

Porque como $0,7=\frac{7}{10}$, multiplicando sus dos términos por 10, por 100, por 1000, &c. no se alterará el quebrado (67), y se tendrá que

$$0,7=\tfrac{7}{10}=\tfrac{70}{100}=\tfrac{700}{1000}=\tfrac{7000}{10000}=\ \&c.$$

$$\text{ó}\ 0,7=0,70=700=0,7000=\ \&c.$$

Si teniendo ceros al fin se quitan, resultan los dos términos divididos por un mismo número, lo que (67) tampoco altera el quebrado. L. Q. D. D.

87 Si los ceros se colocan entre la coma y los guarismos siguificativos, *se hace el quebrado tantas veces menor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como se han puesto entre la coma y los guarismos significativos*; porque en este caso se hace diez, ciento, mil, &c. veces menor el valor de cada parte, y no se hace diez, ciento, mil, &c. veces mayor el número de ellas.

Del mismo modo, si en un número que lleva enteros con decimales, se corre la coma un lugar hácia la izquierda, como el guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresará décimas: el que ántes décimas, ahora centésimas: y así sucesivamente; resulta que cada parte se ha hecho diez veces menor, y por lo mismo esta mutacion de la coma habrá convertido al número propuesto en otro diez veces menor. Si se hubiera corrido la coma dos lugares hácia la izquierda, hubiéramos hecho cien veces menor á dicho número; y en general, *con correr la coma un número cualquiera de lugares hácia la izquierda, se hace al número tantas veces menor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

Por el contrario, *corriendo la coma un número cualquiera de lugares hácia la derecha, quedará hecho el número tantas veces mayor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.* Así, si en el número 8532,74914 coloco la coma entre el 5 y el 3, tendré 85,3274914, que será cien veces menor que el propuesto, y si la pusiera entre el 9 y el 1 tendria 8532749,14, que es mil veces mayor que el propuesto.

88 Puesto que las decimales siguen la misma ley que los enteros, y se escriben y leen lo mismo que ellos, es un punto de la mayor importancia el sustituir los quebrados decimales á los comunes, lo que

se consigue convirtiendo en decimales los quebrados que hayan de entrar en los cálculos. Para esto *se toma el numerador del quebrado por dividendo y el denominador por divisor, y se divide el uno por el otro; mas si el quebrado es propio, no cabrá el divisor en el dividendo; y así se pone o en el cociente, y despues se añade un cero al dividendo y se divide por el divisor; el cociente se pone á la derecha de la coma; se multiplica por el divisor y se resta. Á la resta se añade otro cero y se divide por el divisor; lo que resulta se pone en el cociente á la derecha del guarismo anterior, se multiplica y resta. A la resta se añade otro cero, y se continúa añadiendo un cero por cada guarismo decimal que se quiera sacar: observando que si despues de añadir un cero no cabe el divisor en el dividendo, se pone cero al cociente y se añade otro cero al dividendo.*

1.^{er} *ej.* Quiero sacar con tres decimales el valor de $\frac{5}{17}$; ejecutaré la operacion como aquí se ve:

Tomo el 5 por dividendo y el 17 por divisor; veo que 17 no cabe en 5, y por lo mismo pongo o en el cociente, y despues la coma; añado un o al 5, y veo que 50 entre 17 les toca á 2, que pongo en el cociente despues de la coma; multiplico este cociente por el divisor, le resto del dividendo 50 y saco la resta 16. A esta añado un cero, y veo que 160 entre 17 les cabe á 9, que pongo en el cociente; multiplico por el divisor, y resto del dividendo 160. Al lado de la resta 7 pongo otro cero, veo que 70 entre 17 les toca á 4 que pongo en el cociente; multiplico por el divisor y resto. Del mismo modo continuaria si quisiera sacar mas de los tres guarismos decimales que me propuse; con lo cual tengo reducido el quebrado $\frac{5}{17}$ á quebrado decimal, aproximado hasta milésimas.

50	17
160	0,294
0070	
02	

2.° *ej.* Si quiero reducir á quebrado decimal $\frac{8}{943}$, lo ejecutaré como se ve en la pájina siguente:

Tomaré el 8 por dividendo, el 943 por divisor, y pongo en el cociente cero y coma; añado un cero al 8, y como 80 no contiene al divisor 943, pongo o en el cociente; añado otro al dividendo, y pongo tambien o al cociente; añado otro o al divldendo, y veo que 943 en 8000 ó 9 en 80 cabe 8 veces, pongo 8 en el cociente despues de los dos ceros; multiplico por el divisor y resto; á la resta le añado un cero, y así continuaré la division hasta sacar los guarismos que necesite, que supongo aquí que son seis, y tengo el quebrado 0,008482, que es el mismo que el $\frac{8}{943}$, con diferencia de menos de una millonésima parte de la unidad.

8000	943
04560	0,008482
07880	
02360	

Dem. Como de tomar el numerador por dividendo y el denominador por divisor, no puede salir ningun entero, se pone cero y coma en el cociente; añadiendo un cero al dividendo se convierte en décimas; y por lo mismo se ve si les toca á alguna, y si no, se pone tambien cero en el cociente en el lugar de las décimas; lo mismo decimos de todo lo demas de la regla y resulta L. Q. D. D.

89 Al convertir los quebrados en decimales resulta *cociente exacto*, cuando el denominador no tiene mas factores simples que el 2 y el 5, como 8; 16; &c. &c. 25; 125 &c. V. g. si convierto en decimales los quebrados $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{14}{125}$, lo haré como se ve en (A), (B), (C).

(A)		(B)		(C)	
50	8	70	25	140	125
20	0,625	200	0,28	150	0,112
40		000		0250	
0				000	

y saco cociente exacto; por lo que diré, que $\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{7}{25}=0,28$, y $\frac{14}{125}=0,112$.

Si no sale cociente exacto, sucederá que como la resta ha de ser siempre menor que el divisor, así que se hayan sacado tantas restas diferentes como unidades tiene el divisor ménos una, la siguiente deberá ser una de las anteriores ó el mismo numerador; de donde se sigue que añadiendo un o, dará el mismo cociente y resta que dió ántes: á esta le sucederá lo mismo; y así, se pondrán aquellos guarismos las veces que se quiera. Estas fracciones se llaman *periódicas*. Así, si convierto en decimal el quebrado $\frac{5}{7}$, tendré (A) que al sesto guarismo hallo la resta 5, que es el

(A)		(B)	
50	7	40	11
10	0,714285	70	0,3636
30		40	
20		7	
60			
40			
5			

mismo numerador; por lo que se repetirán los mismos guarismos, y tendré $\frac{5}{7}=0,714285714285714285$ &c.

Si convierto en decimal el quebrado $\frac{4}{11}$, encuentro (B) que al segundo guarismo se repite el numerador; por lo que $\frac{4}{11}=0,3636363636$ &c.

Si convierto el $\frac{2}{3}$ tendré que $\frac{2}{3}=0,66666$ &c.

Si la resta que se repite no es el mismo numerador del quebrado, entónces la fraccion es *en parte periódica* y *en parte no*, como se verá en estos quebrados $\frac{7}{12}$ y $\frac{593}{925}$ que dan $\left\{\begin{array}{l} \frac{7}{12}=0,58333 \text{ &c.} \\ \text{y } \frac{593}{925}=0,641081081081 \text{ &c.}\end{array}\right.$

Sumar, restar, multiplicar y dividir decimales.

90 Para sumar las decimales *se ponen los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas &c. esto es, que la*

coma en todos los sumandos forme columna; despues se tira una raya y se suman exactamente como si fuesen enteros, teniendo cuidado de poner la coma en la suma, de modo que forme columna con las de los sumandos.

1.*er ej.* Si quiero sumar 0,027 con 35,46, con 783,0639, con 0,3, con 9,53 y con 32,0757, los pondré los unos debajo de los otros como aquí se ve:

Y despues de tirada la raya, empiezo por la derecha diciendo: 9 y 7 son 16, pongo 6 debajo de la raya, y paso á la columna siguiente donde digo: 7 y 1 que llevo son 8, y 3 son 11, y 5 son 16, pongo 6 y llevo 1 para añadirla á la suma de la columna siguiente; y continúo la operacion como si fuesen enteros (26), teniendo cuidado de poner la coma entre el 0 y el 4 debajo de las de los sumandos, y digo que la suma es 860,4566.

$$\begin{array}{r} 0,027 \\ 35,46 \\ 783,0639 \\ 0,3 \\ 9,53 \\ 32,0757 \\ \hline 860,4566 \end{array}$$

2.° *ej.* 85,37+9,0345+0,6382+42,085=137,1277.

Dem. Como haciendo la colocacion dicha y sumando en columna, sumamos todas las unidades de una misma especie, y todas las sumas parciales las reunimos en una sola al mismo tiempo que las vamos sacando, resulta (intr. ax. 3.°) L. Q. D. D.

91 Para restarlas *se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de cada especie, esto es, que la coma del sustraendo corresponda debajo de la del minuendo; se tira una raya, y se resta como en los números enteros, poniendo la coma en la resta, formando columna con las de arriba.*

Aquí puede ocurrir que no tengan un mismo número de guarismos decimales el minuendo y sustraendo: si el sustraendo tiene ménos, *se ponen aquellos guarismos que tiene demás el minuendo, y luego se restan los del sustraendo de los que quedan en el minuendo*; si el minuendo tiene ménos que el sustraen-

do se resta el guarismo de la derecha del sustraendo de 10, *y todos los demas de* 9, *hasta llegar al primer guarismo del minuendo, el cual se considera con una unidad ménos.*

1.er *ej.* Quiero restar de 625,4685 el número 354,8796; pondré el sustraendo 354,8796 debajo del minuendo como he dicho y se ve en (A):

(A)	(B)	(C)
625,4685	8375,75426392	475,36
354,8796	789,4358	287,4753825
270,5889	7586,31846392	187,8846175

y despues de tirada la raya, resto como si fuesen enteros (31), cuidando de poner la coma entre el 0 y el 5, y saco la resta 270,5889.

2.º *ej.* Si quisiera restar de 8375,75426392 el número 789,4358, los colocaría como se ve en (B).

Y como el sustraendo tiene ménos guarismos decimales que el minuendo, pongo debajo de la raya los cuatro guarismos 6392 del minuendo, que no tienen correspondientes en el sustraendo, y despues resto como ántes y saco 7586,31846392.

3.er *ej.* Si de 475,36 quisiera restar 287,4753825, los pondria como se ve en (C).

Y como el sustraendo tiene mas guarismos que el minuendo, diría: de 5 á 10 van 5 que pongo; de 2 á 9 van 7; de 8 á 9 va 1; de 3 á 9 van 6; de 5 á 9 van 4; ahora debo considerar al 6 del minuendo con una unidad ménos, y digo: de 7 á 15 van 8, y de 15 llevo 1; y continuando la operacion como ántes saco la resta 187,8846175.

Dem. En los dos primeros casos es la misma (29); en el tercero, es porque se pueden considerar despues de los guarismos decimales los ceros que se deseen sin alterar su valor (86), y queda reducida la operacion á la espuesta (32), que por comodidad en este caso se practica del modo que hemos dicho. L. Q. D. D.

92 Para multiplicar las decimales *no se hace caso de la coma, se multiplican como si fuesen números enteros, y luego en el producto se separan con la coma tantos guarismos de derecha á izquierda como decimales habia en ambos factores juntos; y si no hay bastantes, se completarán con ceros á la izquierda.*

1.^er^ *ej.* Quiero multiplicar 5,37 por 6,3; tomaré por multiplicador el 6,3, y le pondré debajo del multiplicando como si no hubiese coma, conforme se ve en (A):

(A)	(B)	(C)	(D)
5,37	0,35	0,29	0,0273
6,3	0,4	0,3	0,0026
1611	0,140	0,087	1638
3222			546
33,831			0,0000 7098

Despues de tirada la raya, multiplicaré (44) el 5,37 por el 6, 3 sin hacer caso de la coma, y separando en el producto 33831 tres guarismos de derecha á izquierda, que son los decimales que habia en ambos factores, saco 33,831 que es el producto verdadero.

2.° *ej.* Si quiero multiplicar 0,35 por 0,4, ejecutaré la operacion como se ve en (B).

Multiplicaré el 35 por 4, lo que me da el producto 140; y como debo separar tres guarismos, que son los que hay en ambos factores juntos, pondré ántes un cero y tendré 0,140; pero como los ceros despues de los guarismos decimales no les aumentan ni les disminuyen (86), borraré el cero que hay despues del 4, y diré que el producto es 0,14.

3.^er^ *ej.* Si quiero multiplicar 0,29 por 0,3, ejecutaré la operacion como se ve en (C).

Multiplicaré el 29 por 3; y como el producto 87 no tiene mas de dos guarismos, y debo separar tres, supliré con ceros los guarismos que me falten, y tendré el producto 0,087.

Por último si quisiera multiplicar 0,0273 por 0,0026, haria la operacion como se ve en (D), y tendría el producto 0,00007098

Dem. Con prescindir de la coma en el multiplicando, le hacemos tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales tiene (87); y con prescindir de ella en el multiplicador, le hacemos tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay en él; luego (61, 3.°) el producto debe salir tantas veces mayor como espresa el producto de estos dos números; luego para obtener el verdadero, se deberá hacer este mismo número de veces menor: lo que se consigue (87) separando con la coma tantos guarismos como decimales hay en ámbss factores juntos. L. Q. D. D.

93 De lo dicho (87) se deduce que un número que lleva enteros y decimales, ó decimales solas, se multiplica por 10, corriendo la coma un lugar hácia la derecha; por 100 corriéndola dos; por 1000 corriéndola tres; y en general, *para multiplicar por la unidad seguida de cierto número de ceros, se correrá la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros hay despues de la unidad.*

94 Para dividir las decimales *se completarán*, esto es, *se hará que ámbos términos tengan un mismo número de guarismos decimales, añadiendo los ceros que se necesiten al que tenga ménos; entónces se borra la coma, y se ejecuta la division como la de los enteros, sin tener que hacer nada en el cociente. Despues, si la division no sale exacta, aquella resta que se habia de poner en forma de quebrado, se convierte en quebrado decimal*; esto es, se añade á la resta un cero, y se pone la coma en el cociente; se ve cuántas veces cabe el divisor en esta resta, se pone en el cociente despues de la coma este número de veces, ó cero si no cabe; se multiplica por el divisor y se resta; y así se continúa, añadiendo un cero á la resta por cada guarismo decimal que se quiera sacar.

1.^{er} *ej.* Quiero dividir 0,6 por 0,15; añadiré al dividendo un cero y se convertirá en 0,60; despues borro la coma en el dividendo y divisor, y queda reducida la operacion á dividir 60 por 15; lo que ejecutado como aquí se ve: da 4 por cociente; y digo que 0,15 está contenido cuatro veces en 0,6.

60	15
00	4

2.° *ej.* Si quiero dividir 43 por 12,5, como el dividendo no tiene ningun guarismo decimal, le añado un cero; y borrando la coma en el divisor queda reducida la operacion á dividir 430 por 125; la que ejecutada como aquí se presenta: da 3 por cociente y 55 por resta: la que reduciré á decimales añadiéndole un cero, poniendo la coma despues del 3, y continuando la division; para esto, veo que el 125 está contenido 4 veces en 550, pongo este 4 despues de la coma, multiplico por el divisor y resto; á la resta 50 añado otro cero, veo que está contenido cuatro veces el divisor, pongo 4 en el cociente; y así continúo hasta sacar los guarismos decimales que desee, que aquí sólo son dos, porque da cociente exacto.

430	125
0550	
0500	3,44
000	

3.^{er} *ej.* Si quisiera dividir 37,5421 por 8,3, añadiría al divisor tres ceros, porque le faltan tres para tener tantos decimales como el dividendo; borro despues la coma en ambos, y queda reducida la operacion á dividir 375421 por 83000; y ejecutada la operacion como aquí se ve: saco el cociente 4, y en vez de añadir un cero á la resta borraré uno en el divisor, pondré coma en el cociente, y averiguaré cuántas veces el 8300 está contenido en 43421; hallo que cabe 5 veces, pongo 5 en el cociente despues de la coma, multiplico por el divisor y resto; borro otro cero en el divisor, y continúo la operacion, advirtiendo que

375421	8 3~~000~~
43421	4,52314
1921	
261	
120	
370	
38	

si despues de borrados los ceros del divisor, quiero sacar mas guarismos decimales, se añaden ceros á la resta como allí se ve.

Dem. Con añadir los ceros que se necesiten al término que tiene menos guarismos decimales, no alteramos de ningun modo su valor (86); y con suprimir la coma en los dos términos, los multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay, lo que (61, 4.°) no altera el cociente. L. Q. D. D.

95 Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, queda hecha la division, *corriendo la coma hácia la izquierda tantos lugares como ceros acompañan á la unidad supliendo con ceros á la izquierda si el dividendo no tiene bastantes guarismos*; lo cual está fundado en lo dicho (87). Así, si en el número 8465,379, corro la coma dos lugares hácia la izquierda, resultará dividido por 100, y será 84,65379.

96 Para valuar los quebrados decimales, *se multiplican por el número que espresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado.*

Si hay unidades de especie inferior todavía, *se vuelve á multiplicar el quebrado que resulte, por el número de veces que la unidad en que se quiere valuar ahora este qaebrado, cabe en aquella á que se refiere; y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior: y si al fin queda quebrado, se desprecia si no llega á cinco décimas; y se añade en vez de él una unidad, si llega ó pasa de cinco décimas.*

Esc. No se dice que se parta por el denominador, porque la division se hace al colocar la coma en el producto.

1.^{er} *ej.* Si quiero averiguar cuánto valen 0,47 de doblon, multiplicaré el 0,47 por 4, que son los pesos que tiene un doblon, y saco como se ve en (A) 1,88 pesos, esto es, un peso y un quebrado de peso; valúo el quebrado de peso en reales; para lo cual coloco el 15 debajo de 1,88, le multiplico sin hacerlo con el entero 1, y saco 13,20 reales; borro el 0,

multiplico las 2 décimas de real por 34, y saco 6,8 maravedíses ó 7 maravedíses, porque 8 décimas es mayor que 5; por lo que digo que 0,47 de doblon valen 1 peso 13 reales y 7 maravedíses.

2.° *ej.* Si quisiera averiguar cuánto valían 0,7432 de vara, ejecutaría la operacion como se ve en (B), y hallaría 2 pies, 2 pulgadas y 9 líneas.

(A)	(B)
0,47 dob.	0,7432 varas
4	3
1,88 pes.	2,2296 pies
15	12
4 40	4592
8 8	2 296
13,20 rs.	2,7552 pulg.
34	12
6,8 mrs.	1 5104
	7 552
	9,0624 líneas

Sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.

97 Se llaman números denominados *los que constan de unidades de diferentes especies relativas todas á un mismo género*: como 6 varas, 1 pie, 7 pulgadas y 4 líneas, y 5 quintales, 3 arrobas y 8 libras. Para entender las operaciones que vamos á hacer con estos números, es indispensable tener bien presente la division de las unidades de pesos y medidas (16 al 20).

98 Para sumarlos *se ponen todos los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las unidades de cada especie; se tira una raya, y se empieza á sumar por la especie inferior; si la suma de estas unidades contiene alguna ó algunas de la especie superior inmediata, se guardan para sumarlas con ellas; se suman estas; y así se continúa hasta haber sumado las de especie superior, y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.*

Ejemp. Quiero sumar 38 doblones, 3 pesos, 13 reales y 14 maravedíses, con 4 doblones, 1 peso, 3

reales y 6 maravedíses, con 49 doblones, 2 pesos, 8 reales y 25 maravedíses, y con 53 doblones, 12 reales y 19 maravedíses; colocaré todos los sumandos los unos debajo de los otros como aquí se ve:

Tiraré una raya, y sumando los maravedíses tengo 64, que componen un real y quedan 30 maravedíses; borro el 64, pongo debajo los 30 que

(2	(2	(1	
38 dob.	3 ps.	13 rs.	14 mrs.
4 ”	1 ”	3 ”	6 ”
49 ”	2 ”	8 ”	25 ”
53 ”	0 ”	12 ”	19 ”
146 ”	~~8~~	~~37~~	~~64~~
	0 ”	7 ”	30 ”

quedan, y el 1 real que llevo para la columna inmediata, le pongo encima de los reales separado con una media luna; sumo todos estos reales, y tengo 37, que componen 2 pesos y 7 reales; borro el 37, pongo debajo los 7 reales que quedaron, y los 2 pesos los coloco sobre los pesos; sumo estos y tengo 8 pesos, que componen 2 doblones justos; por lo que borro el 8, pongo debajo 0, y coloco los 2 doblones en la columna de los doblones, cuya suma da 146 doblones; y tengo por suma de los números propuestos 146 doblones, 0 pesos, 7 reales y 30 maravedíses.

Dem. Como hemos sumado todas las partes de los sumandos, no queda duda de que hemos sumado los todos. L. Q. D. D.

99 Para restar los números denominados, *se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya, y se va restando cada especie de unidades del sustraendo de las correspondientes en el minuendo, empezando por las de la especie inferior. Si alguna especie de unidades del sustraendo es mayor que la correspondiente en el minuendo, se toma en este una unidad de la especie inmediata superior; y si no hubiese en esta se tomará de la otra, ó de la siguiente si tampoco hubiese en esta &c., y cuando*

se toma una unidad de dos ó tres órdenes superior, se descompone en las inferiores del modo que se verá en los siguientes ejemplos.

1.° De 295 doblones, 2 pesos, 3 reales y 15 maravedíses, quiero restar 89 doblones, 3 pesos, 2 reales y 5 maravedíses; colocaré el sustraendo debajo del minuendo como aquí se ve:

295 dob.	2 ps.	3 rs.	15 mrs.
89 »	3 »	2 »	5 »
205 »	3 »	1 »	10 »

Y despues de tirada la raya empezaré á restar por la columna de los maravedíses, lo que da 10 maravedíses de resta; paso á restar los reales del sustraendo de los correspondientes del minuendo, y hallo 1 de resta; paso á los pesos, y como de 2 pesos no puedo restar 3, tomo una unidad de los doblones que vale 4 pesos, y con los 2 que hay hacen 6, de los que restando los 3 quedan 3 por resta; y por último pasando á los doblones, teniendo en consideracion que tomé 1, resulta por resta 205 doblones, 3 pesos, 1 real y 10 maravedíses.

2.° Si de 47 quintales quiero restar 23 quintales, 2 arrobas, 9 libras y 14 onzas, los colocaré como aquí se ve:

	3	24	16
47 qs.	0 ars.	0 lib.	0 onz.
23 »	2 »	9 »	14 »
23 »	1 »	15 »	2 »

Y como no puedo restar 14 onzas de donde no hay, paso á tomar una libra, que como tampoco hay, ni arrobas, tomo un quintal que tiene 4 arrobas; y como yo solo necesito una libra para restar las onzas, dejo 3 arrobas en el lugar de las arrobas: de la arroba que queda dejo 24 libras en el lugar de las libras: y de la otra libra que vale 16 onzas, resto las 14 onzas, y continúo la operacion como allí se ve, considerando al 7 del 47 quintales como 6; y saco por resta 23 quintales, 1 arroba, 15 libras y 2 onzas.

3.° Si restára 327 varas, 2 pies, 6 pulgadas y 5 líneas, de 578 varas, haría la operacion como aquí se ve: y la resta sería 250 varas, 5 pulgadas y 7 líneas.

	2	11	12
578 vs.	0 ps.	0 pulg.	0 lín.
327 »	2 »	6 »	5 »
250 »	0 »	5 »	7 »

Dem. Como restamos todas las partes del sustraendo de todas las del minuendo, y todas las restas parciales las tenemos reunidas en un solo número, este espresará la resta total. L. Q. D. D.

100 *En* la multiplicacion de los números denominados se pueden seguir varios métodos; pero aquí solo pondrémos el que es mas independiente del talento del calculador, y consiste en practicar las tres reglas siguientes: 1.ª *redúzcanse el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies*; 2.ª *multiplíquense entre sí estos dos números despues de reducidos*; 3.ª *divídase el producto por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en la mayor, y el cociente espresará el producto en las unidades de especie inferior del multiplicando*; por lo que se deberán reducir á las de especie superior segun las reglas dadas (58). En esta cuestion es indispensable conocer cada factor, para practicar la 3.ª regla; por lo que dirémos que el *multiplicando es el de la especie que se busca en el producto, y por consiguiente el otro será el multiplicador.*

1.er *ej.* Si quiero averiguar cuánto valen 7 varas y 1 pie á 9 pesos y 6 reales la vara, observaré que como lo que busco aquí son pesos y reales, el multiplicando es 9 pesos y 6 reales; por lo que los reduciré primero á la menor de sus especies, y tendré reducido el multiplicando á 141 reales y el multiplicador á 22 pies; multiplico el 141 por 22, y saco el producto 3102; el cual le divido por 3, á causa de que el pie está contenido 3 veces en la vara, lo

que me da el cociente 1034, que espresa los reales que valen las 7 varasy 1 pie; y reduciendo estos 1034 reales á pesos (58), sacaré 68 pesos y 14 reales.

2.° *ej.* Si quisiera averiguar cuánto valen 6 quintales, 3 arrobas y 8 libras de azúcar, á 8 doblones, 2 pesos y 9 reales el quintal, los reduciré á la menor de sus especies, y se me convertirán el multiplicando en 519 reales, y el multiplicador en 683 libras; multiplicaré estos dos números entre sí, y el producto 354477 le dividiré por 100, lo que (95) dará 3544,77 reales, que reducidos á doblones hacen 59 doblones y 4,77 reales, que (96) vienen á ser 4 reales y 26 maravedíses.

Dem. El reducir los factores á su menor especie no influye nada en el resultado; pues lo mismo son (ej. 1.°) 7 varas y 1 pie que 22 pies, y 9 pesos y 6 reales lo mismo que 141 reales. Al practicar la 2.ª regla tomamos el valor de la vara tantas veces como pies hay; esto es, multiplicamos el valor de la vara por un número tres veces mayor que el que debe ser; y como practicando la 3.ª hacemos el producto tantas veces menor como lo que ántes le habiamos tomado mayor, resulta que este será el verdadero. El convertirle en las unidades de especie superior, es por satisfacer á la cuestion en los mismos terminos que venia propuesta. L. Q. D. D.

101 Para dividir los números denominados se practicarán las tres reglas siguientes: 1.ª *se reduce el divisor á la menor de sus especies*; 2.ª *se hace la division empezando por las unidades de especie superior del dividendo; y si de esta division queda alguna resta, se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y se añaden las unidades de esta especie que hay en el dividendo; se dividen por el divisor, y si queda alguna resta se reduce á las unidades de especie inferior inmediata; y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior*; 3.ª *despues se multiplica todo este cociente por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior*

del divisor está contenida en la mayor, empezando esta multiplicacion por las unidades de especie inferior; para si resultan unidades de especie superior, añadirlas al producto de la columna inmediata, y el resultado es lo que se pide.

Por ejemplo. Sé (100) que 7 varas y 1 pie han costado 68 pesos y 14 reales; si quiero averiguar á cómo ha costado la vara, dividiré los 68 pesos y 14 reales por 7 varas y 1 pie. Aquí se conoce el dividendo en que es de la misma especie que lo que se busca. Practico la 1.ª regla y se me convierte el divisor en 22 pies; ahora hago la division como aquí se ve:

Empiezo por los	68 ps. 14 rs.	22
pesos, y digo: 68 entre	02	
22 les toca á 3, que son	15	3 ps. 2 rs.
pesos, y me quedan de	——	3
resta 2 pesos, que para	30	——
reducirlos á reales los	14	9 " 6 "
multiplicaré por 15, y	——	
al producto 30 le aña-	44	
diré los 14 reales que	00	

hay en el dividendo; veo que el 22 cabe dos veces en 44, y no deja resta; ahora el cociente 3 pesos y 2 reales le multiplico por 3, que es el que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 9 pesos y 6 reales, que es en efecto el valor de la vara.

Dem. El reducir el divisor á su menor especie no influye nada en el resultado; pues 7 varas y 1 pie es lo mismo que 22 pies. Al practicar la 2.ª regla, como dividimos por el número de pies, hallamos el valor de un pie; y como lo que se pide en la cuestion es el valor de la vara, por esta razon se ha de practicar la 3.ª regla; esto es, en este caso se ha de multiplicar el valor del pie por 3 que son los pies que tiene la vara, y en general por el número que espresa las veces que la unidad inferior del divisor está contenida en la mayor L. Q. D. D.

ALGEBRA

nociones preliminares.

102 *Algebra* es la *ciencia que trata de la cantidad en general*. Los signos de que se vale para espresar las cantidades, son las letras del alfabeto; v. g. *a* puede representar cualquier cantidad, sea de la especie que sea, como 20, 30, &c. 40 varas, 50 hombres, &c. Nunca le pueden faltar signos al Algebra para espresar las cantidades; pues se vale de los dos alfabetos minúsculo y mayúsculo, y tambien del griego. Ademas, si á una letra v. g. *a* se le pone un acento por la parte de arriba ó por la parte de abajo, á la derecha ó á la izquierda, en esta forma a', $'a$, $a_{,}$, $_{,}a$, representa una cantidad diferente de la que espresa *a*; y se leen *a primera, primera a*, *a subprimera*, *subprimera a*; tambien se le pueden poner dos, tres &c. acentos, y se leen *segundas*, *subsegundas &c.*

Las definiciones de la Aritmética y Algebra manifiestan la mayor generalidad de esta, y para que el principiante no tema el emprender su estudio, le decimos que las operaciones del Algebra son las mismas que las de la Aritmética, y que hay una grandísima analogía entre ellas. En efecto, despues de haber dado á conocer los números, v. g. 20 hombres, 20 caballos, 20 peras &c. hemos prescindido de que los 20 fuesen hombres, caballos &c., y nos hemos quedado con el número abstracto 20; pero este nunca puede ser 19 ni tampoco 21 &c. Donde se ve que la mayor abstraccion que puede hacer la Aritmética en los números, es la del valor específico; pero si ahora sólo consideramos en el 20 una coleccion de hombres, caballos &c. sin atender á que sea un número determinado, si no una coleccion capaz de aumento ó diminucion, entónces no puede estar representada por 20, y la espresarémos por *a*; por consiguiente la *a* representa una cantidad de hombres, caballos &c. se-

gun nos acomode. Consiste, pues, todo el gran secreto del Álgebra *en prescindir del valor numérico de las cantidades*; cuya máxima bien inculcada á los principiantes les hará disipar el gran cúmulo de dificultades que vulgarmente se dice que hay en el Álgebra, lo que los arredra, y hace que la miren como superior á sus fuerzas.

103 Para indicar las diferentes operaciones y supuestos que se hacen con las cantidades, emplea el Álgebra los signos que dejamos esplicados en la Aritmética, y algunos otros que darémos á conocer. Así, la espresion $a+b$ quiere decir que lo *que valga* b *se ha de añadir á lo que valga* a, y nada mas; $a-b$ quiere decir que lo que valga b se ha de quitar de lo que valga a; $a\times b$ ó $a.b$ ó ab, indica que *el valor de* a *se ha de multiplicar por el de* b (en el Algebra se puede suprimir el signo $\times$ ó . y dejar sólo ab, y en la Aritmética no, á causa del sistema de numeracion; v. g. 3×4 ó 3.4 vale 12; y si se quita el signo vale *treinta y cuatro*); $\frac{a}{b}$ ó $a{:}b$, indica que *el valor de* a *se ha de dividir por el de* b.

Este signo $>$ es el de *mayoria*, y puesto al reves $<$ el de *menoría*; así, $a>b$ quiere decir que a *es mayor que* b; y $b<a$, que *el valor de* b *es menor que el de* a; ó mas general: el signo $>$ ó $<$ sirve para espresar la *desigualdad* de dos cantidades. El signo $\pm$ se llama el *signo de ambigüedad*; así, $a\pm b$, ó $a\mp b$, indica que *la* b *se ha de añadir ó quitar al valor de* a, *ó al contrario.*

104 En el Álgebra no sólo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino al modo con que influyen en la cuestion que el calculador se propone resolver. Ahora, al resolver una cuestion sólo se pueden encontrar dos clases de cantidades que influyan en ella: cantidades que *conspiren al fin que se propone el calculador*, que se llaman *positivas*; y cantidades que conspiren á un fin opuesto, que se llaman

negativas. Así, si quiero averiguar en cuánto tiempo se llenará un estanque, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendré que atender al agua que entra y á la que sale; y como el agua que entra conspira al fin que me propongo, esta será la positiva; y la que sale, que conspira á vaciar el estanque, será la negativa.

Si, al contrario, quiero averiguar el tiempo en que se vacia un estanque, en que por una parte sale agua y por otra entra, tendré que atender tambien en este caso al agua que sale y á la que entra; en cuyo caso la que sale es la positiva, y la que entra la negativa.

Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tratan de aumentar el resultado que busca, y por lo mismo se señalan con el signo $+$, que es el de aumento ò de adicion; y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que busca, y por lo mismo se señalan con el signo $-$. De manera que de aquí en adelante el signo $+$ tendrá dos acepciones: una general, que es la de indicar la operacion de sumar, y la otra particular de decir que la cantidad á que afecta, es positiva; lo mismo sucede con el signo $-$, que siempre indicará la operacion de restar, y en particular, que la cantidad á que afecta es negativa.

Por consiguiente toda cantidad que se escriba, deberá llevar el signo $+$ ó el signo $-$ para denotar si es positiva ó negativa; no obstante el signo $+$ se suprime al principio de escritura. V. g. a es lo mismo que $+a$; el $-$ nunca se suprime.

105 Los signos $+$ y $-$, ó las cantidades positivas y negativas, son los únicos recursos del Algebra para espresar las palabras con que se suple todo en Aritmética: y aun las frases irónicas con que nos producimos, cuando decimos que *fulano tiene* 100 *reales que debe*; la palabra *tiene* parece que da á conocer que *posee dinero*, y la palabra *debe* manifiesta

que lo decimos de chanza ó que nos burlamos: esta frase del lenguage vulgar se espresa en Álgebra diciendo: *fulano tiene* — 100 *reales*.

106 Entendido esto, cuando está repetida por sumando una misma letra, se pone una sola vez con un número ántes que espresa las veces que está repetida, cuyo número se llama *coeficiente*; v. g. en vez de $a+a$ se escribe $2a$; en vez de $ab+ab+ab$, se pone $3ab$; y los números 2 y 3, son los coeficientes. Tambien se pone coeficiente cuando la letra ó cantidad está repetida con el signo —; así en vez de $-ab-ab-ab-ab$, se pone $-4ab$.

Cuando una letra está repetida por factor, se pone una vez sola con un número á su derecha un poquito mas alto, que tenga tantas unidades como veces está repetida la letra por factor; así, en vez de aa, se escribe a^2; en vez de aaa se pone a^3. Este número se llama *esponente*; y para leer v. g. a^5 se dice *a cinco*, ó *a elevada á cinco*.

Cuando una letra a se presenta sola, se le supone la unidad por coeficiente, la unidad por esponente, y tambien si se quiere la unidad por divisor; por esta causa a es lo mismo que $1a$, que a^1, y que $\frac{1a^1}{1}$.

Ahora, toda cantidad ó espresion de cantidad, sea de la especie que sea, separada de otras por medio del signo + ó —, se llama *término*; v. g. $-a$ es un término, $8abd$, $\frac{7bd}{c}$, $\frac{a^8b^3c^5}{d-e}$, son tambien términos.

107 Se dice de un término que consta de tantas *dimensiones* cuantas letras tiene, si no hay denominador; v. g. $+a$ es un término de *una* dimension; $5ac$ de *dos*; $-7abc$ de *tres*; donde se ve que el coeficiente no constituye dimension.

Si la cantidad está en forma de quebrado, el número de las dimensiones está espresado por la diferencia entre las del numerador y las del denominador;

v. g. $\frac{ab}{d}$ es de *una* sola dimension; $\frac{2ab}{cd}$ es un término de dimension *nula*, ó de *cero dimensiones*; y cuando hay mas en el denominador que en el numerador, entónces se dice que la dimension es *negativa*; así, el término $\frac{ab}{cde}$ es de *ménos una* dimension. Finalmente, cuando las letras tienen esponentes, se reputa cada letra por tantas dimensiones como unidades hay en su esponente.

108 Cuando una espresion algebráica consta de un solo término, se llama *monomia* ó es un *monomio*; cuando consta de mas de uno se llama en general *polinomio*, distinguiéndose en particular con los nombres de *binomio*, *trinomio*, *cuadrinomio* &c. cuando consta de dos, tres, cuatro &c. monomios. Así, las espresiones $a+b$, $4a^5-5b^2c^3$ son binomios, de los cuales a y $4a^5$ son los *primeros* términos, y $+b$, $-5b^2c^3$ son los *segundos*; &c.

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un mismo número de dimensiones, se dice que es *homojéneo*; y cuando no, que es *heterojéneo*.

109 Se llaman términos *semejantes* aquellos que tienen unas mismas letras y en cada una los mismos esponentes; por ejemplo $4a^2b$, $5a^2b$ y $7ba^2$ son términos semejantes.

Es muy frecuente en el Álgebra el encontrar términos de esta especie en los resultados de las operaciones, en cuyo caso se deben *simplificar*. Esta simplificacion se hace *sumando los coeficientes, si tienen un mismo signo los términos semejantes, y poniendo esta suma por coeficiente á uno de los términos con su signo*, cuya operacion se llama *reduccion*; ó *restando los coeficientes, si tienen diferente signo, y poniendo la resta á uno de los términos semejantes, con el signo del término que tenia mayor coeficiente*, cuya operacion se llama *destruccion*.

Por ejemplo, supongamos que se tiene el polinomio $4a^3 - 7bc - d^2 + 3ac + 6a^3 + 3bc + a^3 - 8d^2 - 3ac + 4b^3$; en que observo tres términos donde se halla a^3, y por lo mismo hay tres semejantes con él; y como tienen un mismo signo, haré la reduccion diciendo: 4 coeficiente de $4a^3$, y 6 de $6a^3$, son 10, y 1 coeficiente de a^3 (§ 106) son 11; luego pondré un término en que haya a^3 con un coeficiente 11, y con el signo $+$ que es el que llevan dichos términos; pero aquí se omitirá dicho signo (104). Luego, veo que hay dos términos donde se halla bc; y como tienen diferente signo, haré la destruccion diciendo: la diferencia entre 7 y 3 es 4, que será el coeficiente que deberé poner á bc; y como el término $-7bc$ es el que tiene mayor coeficiente, manifiesta que las cuatro que quedan son para quitar, y de consiguiente pondré el signo $-$ al $4bc$; como hay dos términos semejantes con d^2 y tienen un mismo signo, haré la reduccion diciendo: 1 coeficiente de $-d^2$, y 8 de $-8d^2$ son 9, que pondré por coeficiente al d^2 con el signo $-$, y tendré $-9d^2$; ahora paso á hacer la destruccion de los términos $+3ac$ y $-3ac$, diciendo: la diferencia entre 3 y 3 es cero, que deberá ser el coeficiente de ac; pero el cero por coeficiente manifiesta que no está el término aquel ninguna vez por sumando, y por lo mismo no se pondrá. Cuando los términos semejantes son iguales por tener un mismo coeficiente, y tienen diferente signo como en este caso, se dice $+3ac$ y $-3ac$ *se destruyen*, y se borran ó tachan en el parage donde están; y como ya no hay mas que el $+4b^3$ que no tiene semejante, este quedará del mismo modo en el resultado, el que será $11a^3 - 4bc - 9d^2 + 4b^3$.

Para entender la razon de esto, se considerará que cada término, sin coeficiente, representa una cosa cualquiera, como un duro, una manzana &c.; y así como no encontramos ninguna dificultad en que tres manzanas y cuatro manzanas son siete manzanas: nueve duros menos seis duros son tres duros: y ménos cinco pesetas menos cuatro pesetas son menos

nueve pesetas, ó que el que debe cinco pesetas por un lado y cuatro por otro, resulta debiendo nueve &c.: del mismo modo una cosa *ab* mas tres veces la misma *ab* ó $3ab$, son cuatro veces la cosa *ab* ó $4ab$. Todo está segun se ve, en comprender el lenguage algebráico.

De la suma de las cantidades algebráicas.

110 Sumar en Álgebra *es reunir en una sola espresion el valor de dos ó mas.*

Para ejecutar esta operacion *se colocan todos los sumandos los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que llevan, y queda hecha la suma; despues se simplifica si se puede* (109).

Dem. En efecto, si quiero sumar $+b$ con $+a$, indicaré la operacion como aquí se ve: $+a+(+b)$; donde observo que el signo $+$ que está fuera del paréntesis, indica la operacion de sumar, esto es, que aquí lo que me propongo es aumentar; el signo $+$ de dentro del paréntesis, indica que la cantidad $+b$ que está dentro, es positiva, esto es, que conspira al fin que me propongo; y como este es aumentar, se deberá poner la *b* á continuacion de la *a* con el signo que denote este aumento, esto es, con $+$, y tendré que

$$+a+(+b)=+a+b=a+b.$$

Si con la cantidad $+a$ quiero sumar $-b$, indicaré la operacion como aquí se ve: $+a+(-b)$; donde observo, como ántes, que el signo $+$ de fuera del paréntesis, indica que el fin que me propongo es aumentar; el signo $-$ de dentro, indica que la cantidad *b* es negativa, ó que conspira al fin contrario para que se entabla el cálculo; luego conspirará á disminuir; por lo que deberé poner la *b* á continuacion de la *a* con el signo $-$ que denota la diminucion, y tendré que $+a+(-b+)=+a-b=a-b$.

Comparando estos resultados con lo que prescribe la regla, y generalizándola á los polinomios, resulta L. Q. D. D.

Cor. De donde se sigue que

$$a+(\pm b)=a\pm b, \text{ y } a+(\mp b)=a\mp b.$$

111 Para sumar polinomios *se indica la operacion, poniendo los sumandos los unos á continuacion de las otros, cada uno dentro de un paréntesis; despues se practica la regla solo con quitar los paréntesis; y luego se simplifica*, como se ve en este ejemplo.

$$(4b^2a+5a^2c-2abd)+(3b^2-8a^3)+$$
$$(7abd+4a^3-2a^2c+3b^2a)+(4c^3-6a^4)=4b^2a+5a^2c-$$
$$2abd+3b^2-8a^3+7abd+4a^3-2a^2c+3b^2a+4c^3-$$
$$6a^4=7b^2a+3a^2c+5abd+3b^2-4a^3+4c^3-6a^4.$$

De la operacion de restar cantidades algebráicas.

112 Restar en Álgebra *es hallar la diferencia entre dos cantidades, ó quitar una cantidad de otra dada.*

Esta operacion se ejecuta *poniendo el sustraendo con signos contrarios á los que lleve, á continuacion del minuendo, y despues se simplifica.*

Dem. En efecto, si de la cantidad $+a$ quiero restar la cantidad $+b$, indicaré la operacion como aquí se ve: $+a-(+b)$;
donde observo que el signo $-$ de fuera del paréntesis indica la operacion de restar, esto es, que el fin que me propongo es disminuir; el signo $+$ de dentro, indica que la cantidad b es positiva, ó que conspira al fin que me propongo; luego deberé poner la b despues de la a con el signo $-$ que indica la diminucion, y tendré que $+a-(+b)=+a-b=a-b$.

Si de la cantidad a quisiera restar la cantidad $-b$, indicaria la operacion de este modo: $+a-(-b)$;
y observaría que el signo $-$ de fuera del paréntesis, indica que el fin que me propongo es disminuir; el signo $-$ de dentro, indica que la cantidad b conspira al fin opuesto; luego conspirará á aumentar; luego se deberá poner la b á continuacion de la a, con el signo $+$ que denota dicho aumento, y tendré que $+a-(-b)=+a+b=a+b$.

Comparando estos resultados con la regla, y generalizándola á los polinomios, resulta L. Q. D. D.

Cor. De donde se sigue en general que $a-(\pm b)=a\mp b$, y $a-(\mp b)=a\pm b$.

Esc. El segundo resultado de la operacion de sumar corresponde al lenguage irónico *á un hombre le han hecho pobre con dádivas*, que quiere decir que le han aumentado *gastos*. Igualmente, el segundo resultado de la operacion de restar corresponde *á hacer rico á un hombre quitándole*; pero será quitándole *gastos*. Mas el Álgebra, que es una lengua perfecta, no admite palabras de doble sentido, ni capciosas; en ella todo está perfectamente determinado, todo es verdad, todo exactitud.

113 Para restar polinomios *se escribe el minuendo* (si se quiere dentro de paréntesis), *despues el signo* —, *y luego el sustraendo dentro de un paréntesis; despues se practica la regla quitando los paréntesis, cuidando de mudar los signos del sustraendo, y se simplifica*, como se ve en este ejemplo.

Si de $18a^7b^2-5c^4d+9a^2b^2c^3$
quiero restar $4a^2b^2c^3-3a^7b^2-7c^4d$,
ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$18a^7b^2-5c^4d+9a^2b^2c^3-(4a^2b^2c^3-3a^7b^2+7c^4d)=$$
$$18a^7b^2-5c^4d+9a^2b^2c^3-4a^2b^2c^3+3a^7b^2+7c^4d=$$
$$21a^7b^2+2c^4d+5a^2b^2c^3.$$

De la multiplicacion algebráica.

114 Multiplicar en Álgebra *es tomar una cantidad tantas veces como diga otra, y tomarla del modo que diga se debe tomar*. Esto es, el multiplicador con sus unidades dice las veces que se debe tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que se debe tomar.

Pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un monomio por otro*; *un polinomio por un monomio*, ó al contrario; y *un polinomio por otro polinomio*.

Para multiplicar un monomio por otro, hay que atender á cuatro cosas: á *signos*, *coeficientes*, *letras* y *esponentes*.

Para demostrar la regla de los signos, me propondré multiplicar $+a$ por $+b$, ó para mayor sencillez y claridad haré $b=1$, é indicaré la operacion de este modo: $+a\times+1$;
ahora, el multiplicador $+1$ dice con sus unidades que se tome una vez al multiplicando; y con su signo $+$ dice que se debe tomar como él sea; el multiplicando $+a$ es positivo, luego se deberá tomar una vez positivamente; luego será $+a\times+1=+1a=+a$;
y en cuanto á los signos dará $+\times+=+$.

Sea ahora el multiplicador -1, y tendré indicada la operacion de este modo: $+a\times-1$;
aquí, el multiplicador con sus unidades dice que se debe tomar una vez al multiplicando; y con su signo que se debe tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le deberé tomar una vez negativamente, y tendré $+a\times-1=-1a=-a$;
y en cuanto á signos: $+\times-=-$.

Si el multiplicando fuese negativo tal como $-a$, y el multiplicador $+1$, indicaria la operacion de este modo: $-a\times+1$;
donde el multiplicador $+1$, dice con sus unidades que se debe tomar una vez el multiplicando; y con su signo, que se debe tomar como él sea; el multiplicando es negativo, luego se deberá tomar una vez negativamente, y será $-a\times+1=-1a=-a$;
y para los signos dara $-\times+=-$.

Finalmente, si el multiplicador fuese -1, tendria indicada la operacion de este modo: $-a\times-1$;
donde el multiplicador -1, dice con sus unidades que se debe tomar el multiplicando una vez; y con su signo, que se debe tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego se deberá tomar positivamente, y se tendrá $-a\times-1=+1a=+a$;
y para los signos resultará $-\times-=+$.

Estos cuatro casos se convierten en estos dos, á saber: *signos semejantes*, esto es, $+$ *por* $+$ ó $-$ *por* $-$, *ó en general* $\pm$ *por* $\pm$ ó $\mp$ *por* $\mp$, *dan siempre* $+$ *en el producto*; *y signos desemejantes*, esto es,

$+$ por $-$ ó $-$ por $+$, ó en general $\pm$ por $\mp$ ó $\mp$ por $\pm$, dan siempre $-$ en el producto.

Los coeficientes *se multiplican por las reglas de Aritmética*; porque si $a\times b=ab$, de multiplicar $2a$ por $3b$, debe resultar (61, 3.°) un producto seis veces mayor que ab, esto es, $2\times 3ab$ ó $6ab$.

Las letras que son diferentes en ambos factores, *se ponen unas á continuacion de otras sin interposicion de signos ningunos* (103).

En punto á los esponentes, *los de una misma letra se suman*; porque si se tiene que multiplicar a^3 por a^2, indicando y ejecutando la operacion como aquí se ve: $a^3\times a^2=aaa\times aa=aaaaa=a^5=a^{3+2}$ resultará la regla.

Así, para multiplicar $+4b^3a^4c^2e$ por $5a^3b^5cd^4$, diré: $+$ por $+$ da $+$, que pondré en el producto; 4 por 5 son 20, que pondré despues del signo $+$; b^3 por b^5, sumando sus esponentes, será b^8; a^4 por a^3 dará a^7; c^2 por c, sumandos sus esponentes 2 y 1 dará c^3; y como no hay e en el multiplicador ni d en el multiplicando, se pondrán despues de lo que ya hemos sacado, y se tendrá que
$+4b^3a^4c^2e\times +5a^3b^5cd^4=+20b^8a^7c^3ed^4$.

Si los esponentes son indeterminados, se indica la suma de los de los factores; así, si quiero multiplicar $+3a^mb^2c^nd^r$ por $-7b^sa^te^7d^s$,
tendré que el producto será $-21a^{m+t}b^{2+s}c^nd^{r+s}e^7$.

115 Para multiplicar un polinomio por un monomio, ó un monomio por un polinomio, *se multiplica cada término del polinomio por el monomio*; así, si quiero multiplicar

$$5b^2c^4-4a^3d^5+3b^2cd^4 \text{ por } -3a^5d^6c^3,$$

indicaré y ejecutaré la operacion de este modo:

$$(5b^2c^4-4a^3d^5+3b^2cd\ )-\times 3a^5d^6c^3=$$
$$15b^2c^7a^5d^6+12a^8d^{11}c^3-9b^2c^4a^{10}a^5;$$

multiplicaré el primer término $5b^2c^4$ por $-3a^5d^6c^3$, lo que (114) dará $-15b^2c^7a^5d^6$; luego multiplicaré el $-4a^3d^5$ por $-3a^5d^6c^3$, lo que dará $+12a^8d^{11}c^3$;

y por último multiplicaré el $+3b^2cd^4$ por $-3a^5d^6c^3$, que dará $-9b^2c^4d^{10}a^5$, y tendré el producto que allí se presenta.

116 Para multiplicar un polinomio por otro, *se multiplica todo el multiplicando por el 1.er término del multiplicador; despues todo el multiplicando por el 2.° término del multiplicador; despues por el tercero &c.; se van colocando los productos unos á continuacion de otros con los signos con que vayan saliendo, y luego se simplifica si se puede.*

1.er *ej.* Si quiero multiplicar $a+b$ por $a-b$, multiplicaré primero $a+b$ por a, lo que da a^2+ab; y luego $a+b$ por $-b$, lo que da $-ab-b^2$, que puesto á continuacion del anterior y destruyendo $+ab$ con $-ab$, se tendrá

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Esc. Este resultado nos dice: que *la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de estas cantidades con un esponente duplo del que tenian en los factores.*

Recíprocamente, si dada la diferencia de dos cantidades se quiere descomponer en factores, *se pondrá la suma de dichas cantidades multiplicada por su diferencia, poniendo á cada una la mitad del esponente que tenia.* Así, $a^8-b^6=(a^4+b^3)(a^4-b^3)$;

$$m^9-n^5=(m^{4\frac{1}{2}}+n^{2\frac{1}{2}})(m^{4\frac{1}{2}}-n^{2\frac{1}{2}})$$

2.° *ej.* Si quiero multiplicar

$$4a^3b^2-3a^2b^3+5b^5 \text{ por } 3a^2b-4ab^2,$$

indicaré y ejecutaré la operacion de este modo:

$$(4a^3b^2-3a^2b^3+5b^5)(3a^2b-4ab^2)=$$
$$12a^5b^3-9a^4b^4+15b^6a^2-16a^4b^4+12a^3b^5-20ab^7=$$
$$12a^5b^3-25a\,b^4+15b^6a^2+12a^3b^5-20ab^7;$$

multiplicaré primero todo el multiplicando por el primer término $3a^2b$ del multiplicador, lo que da el producto $12a^5b^3-9a^4b^4+15b^6o^2$; despues multiplicaré todo el multiplicando por el segundo término $-4ab^2$ del multiplicador, é iré colocando el

producto á continuacion del anterior, y ejecuto la reduccion como allí se ve.

3.° $(a^6b^3+a^9+b^9+b^6a^3)(a^3-b^3)= a^9b^3+a^{12}+a^3b^9+b^6a^6-a^6b^6-a^9b^3-b^{12}-b^9a^3=a^{12}-b^{12}$.

De la division algebráica.

117 Dividir en Álgebra *es buscar cuántas veces una cantidad contiene á otra, y del modo que la contiene*; de donde resulta que *el divisor multiplicado por el cociente debe dar el dividendo*; y por lo mismo se puede decir tambien que dividir *es hallar una cantidad que multiplicada por el divisor dé el dividendo.*

Para dividir un monomio por otro hay que atender á cuatro cosas, que son: 1.° *signos*; 2.° *coeficientes*; 3.° *letras*; y 4.° *esponentes.*

1.° *Signos semejantes dan* + *en el cociente, y desemejantes dan* —.

Dem. Como el signo del divisor, combinado con el que haya de llevar el cociente, ha de producir el del dividendo, cuando el dividendo tenga el signo + el cociente tendrá el mismo signo que el divisor; pues solo signos semejantes (114) producen +; y cuando el dividendo tenga el signo —, el cociente llevará signo contrario al que tenga el divisor; pues estos son (114) los que producen —;

luego $\frac{+}{+}=+$, $\frac{+}{-}=-$, $\frac{-}{+}=-$, $\frac{-}{-}=+$,

ó en general $\frac{\pm}{\pm}=+$, $\frac{\pm}{\mp}=-$, $\frac{\mp}{\pm}=-$, $\frac{\mp}{\mp}=+$,

que es L. Q. D. D.

2.° *Los coeficientes se dividen por las reglas de la Aritmética; y si no se pueden dividir con exactitud, se simplifica si se puede.*

Dem. Como el cociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo, el coeficiente del cociente por el del divisor ha de producir el del dividen-

do; luego el coeficiente del cociente deberá ser, lo que resulte de dividir el del dividendo por el del divisor. L. Q. D. D.

3.° *Los letras diferentes que tengan el dividendo y divisor, se dejan donde estén; y las letras que haya comunes, sin esponente ó con uno mismo, se borran en ambos términos.*

Dem. Lo primero es porque de este manera queda indicada la operacion; y lo segundo, porque en el cociente no puede haber nada que sea comun á los dos términos de la division; pues al hacer la multiplicacion resultarian duplicadas en el producto, y no como están en el dividendo, que es lo que debe resultar. L. Q. D. D.

4.° *Si las letras comunes tienen esponentes diferentes, se resta el menor del mayor; y queda la letra en el término que tiene mayor esponente, con un esponente igual á la diferencia hallada.*

Dem. Esto equivale á suprimir en ambos términos lo que tienen de comun. L. Q. D. D.

Entendido esto, vamos á resolver algunos ejemplos.

1.° Si quisiera dividir $12a^5b^2c^3d^2$ por$-ba^3c^7e$ diria: $+$ del dividendo (104) dividido por $-$, da $-$; 12 dividido por 3 da 4; a^5 dividido por a^3, es a^2, porque restando el esponente 2 de la a del divisor, del esponente 5 de la a del dividendo, queda 2; b^2 dividido por b, es b, porque $2-1=1$, y $b^1=b$; c^3 dividido por c^7 da c^4 en el divisor, porque la diferencia entre 3 y 7 es 4, y en el divisor es donde hay mayor esponente; la d^2 quedará en el dividendo, y la e en el divisor; de manera que tendré

$$\frac{12a^5b^2c^3d^2}{-3ba^3c^7e}=\frac{4a^2bd^2}{c^4e}$$

2.° Si tuviera que ejecutar esta division indicada $\frac{20a^9b^5c^md^sf}{a8\ {}^4b^2c^nd^rf^2}$, diria: $+$ por $+$ da $+$, que no pongo (104); 20 dividido por 8 no se puede ejecutar, y así

simplificaré dividiendo ambas cantidades por 4, lo que las reducirá á $\frac{5}{2}$; ahora diré: a^9 dividido por a^4 es a^5 en el dividendo; b^5 dividido por b^2 da b^3; c^m dividido por c^n no podemos hacer sinó indicarlo; pero como no sabemos si m es mayor que n ó n mayor que m, no sabemos cuál se debe restar de cuál; podemos restar la n de la m y dejar en el numerador del cociente c^{m-n}; ó al contrario, y dejar c^{n-m} en el denominador, pues siempre el cociente por el divisor da el dividendo; pero preferirémos el dejar c^{m-n} que es mas sencillo; y haciendo lo mismo con las demas letras tendrémos

$$\frac{20a^9b^5c^md^sf}{8a^4b^2c^nd^rf^2}=\frac{5a^5b^3c^{m-n}d^{s-r}}{2f}, \text{ ó } =\frac{5a^5b^3}{2c^{n-m}d^{r-s}f}$$

118 Consideremos ahora los resultados que puede dar la espresion $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}$ (A).

Aquí puede ocurrir que $m>n$, ó $m=n$, ó $m<n$.

1.° Si $m>n$ será necesario añadir á n una cantidad cualquiera u, para que sea igual con m; de manera que $m=n+u$; y sustituyendo este valor en la espresion (A), será $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{n+u-n}=c^u$, porque $+n$ y $-n$ se destruyen. Este caso no nos enseña nada de nuevo.

2.° Si $m=n$, sustituyendo en (A), será

$$\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{n-n}=c^0;$$

aquí encuentro una espresion c^0, desconocida; así, para ver lo que significa haré la sustitucion de n por m ántes de indicar la resta de los esponentes, y tendré

$$\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^n}{c^n}=1,$$

porque toda cantidad dividida por sí misma da (51, 3.°)

la unidad; luego tengo aquí dos espresiones c^0 y 1 que son el resultado de una misma $\frac{c^m}{c^n}$; luego serán (intr. ax 5.°) iguales entre sí, y se tendrá $c^0=1$; pero c espresa una cantidad cualquiera *luego toda cantidad elevada á cero es igual á la unidad.*

3.° Si $m<n$, añadiendo á m una cantidad cualquiera u, para que sea igual con n será $m+u=n$, y poniendo en (A) en vez de n este valor, tendré

$$\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{m-(m+u)}=c^{m-m-u}=c^{-u}.$$

Tambien hallo aquí una espresion c^{-u} no conocida; así, para indagar lo que espresa, haré la sustitucion ántes de indicar la resta de los esponentes, y tendré

$$\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^m}{c^{m+u}}=\frac{c^m}{c^u c^m}=\frac{1}{c^u};$$

donde tengo dos valores de $\frac{c^m}{c^n}$, á saber: c^{-u} y $\frac{1}{c^u}$ que por lo dicho (intr. ax. 5.°) serán iguales, y tendré $\frac{1}{c^u}=c^{-u}$;

que dice que *toda cantidad se puede trasladar del divisor al dividendo, ó al contrario, mudando el signo á su esponente.*

Esta proposicion se puede demostrar directamente de este modo.

Sea $\frac{ax^m}{bz^n}$ la fraccion propuesta. Si el numerador se multiplica por $z^n \times z^{-n}=z^{n-n}=z^0=1$, no se alterará la fraccion; y por la misma razon, tampoco se alterará multiplicando su denominador por $x^m.x^{-m}=1$; luego se tendrá

$\frac{ax^m}{bz^n}=\frac{ax^m z.^n z^{-n}}{bz^n.x^m.x^{-m}}$; suprimiendo en ambos términos los factores comunes $x^m.z^n$, resulta

$$\frac{ax^m}{bz^n}=\frac{az^{-n}}{bx^{-m}}.$$

119 Para dividir un polinomio por un monomio, *se divide cada término del polinomio por el monomio*; porque dividiendo todas las partes del dividendo, y reuniendo todos los cocientes; debe resultar (intr. ax. 3.°) el cociente total.

Así, si quiero dividir la cantidad $15a^6b^2-12a^4c^3+8b^4c^5$ por $-6a^3bc^4$, tendré

1.° $\frac{15a^6b^2}{-6a^3bc^4}=-\frac{5a^3b}{2c^4}$;

2.° $\frac{-12a^4c^3}{-6a^3bc^4}=\frac{2a}{bc}$; 3.° $\frac{8b^4c^5}{-6a^3bc^4}=-\frac{4b^3c}{3a^3}$;

luego $\frac{15a^6b^2-12a^4c^3+8b^4c^5}{-6a^3bc^4}=\frac{2a}{bc}-\frac{5a^3b}{2c^4}-\frac{4b^3c}{3a^3}$.

120 Para dividir un polinomio por otro, lo primero que se hará es *ordenar*; para lo cual se verá la letra que está mas repetida en el dividendo y divisor, y se volverán á escribir principiando en ambos por el término en que dicha letra tenga mayor esponente; despues el que tenga el esponente inmediato menor &c.

Hecho esto, *divídase el* 1.er *término del dividendo por el* 1.° *del divisor, y se tendrá un término del cociente; multiplíquese este término por todo el divisor, y réstese el producto de todo el dividendo* (lo cual se conseguirá mudando los signos del producto conforme se vaya formando) *y se hará la destruccion que se pueda. Despues se divide el* 1.er *término de esta resta por el* 1.° *del divisor, lo que dará el* 2.° *término del cociente; despues se ejecutará la multiplica-*

cion y resta; y se continuará del mismo modo hasta que se halle cociente exacto, ó hasta que el mayor esponente de la letra por que se ordena, sea en la resta menor que el mayor de la misma en el divisor; entónces no hay cociente exacto, y se indica la division de la resta por el divisor (49).

Ejemp. Quiero dividir

$$a^3b^3c-ab^2c^2-2a^4b^2c+a^5bc+2a^2bc^2-a^3c^2$$

por a^2+b^2-2ab.

Para ordenar, veo que la a es la que se halla mas repetida en ambos términos, y ordenando por ella tendré

$$\begin{array}{l|l}
a^5bc-2a^4b^2c+a^3b^3c+2a^2bc^2-ab^2c^2 & a^2-2ab+b^2 \\
\qquad\qquad -a^3c^2 & \overline{\qquad\qquad} \\
-a^5bc+2a^4b^2c-a^3b^3c & a^3bc-ac^2 \\
\hline
\qquad -a^3c^2+2a^2bc^2-ab^2c^2 & \\
\qquad +a^3c^2-2a^2bc^2+ab^2c^2 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Ahora empezaré la division diciendo: a^5bc dividido por a^2 es a^3bc, que pondré en el cociente; haré la multiplicacion de a^3bc por todo el divisor, diciendo: + por + da +, y como se ha de restar es — que pongo debajo del + que debia tener el 1.er término del dividendo; a^3bc por a^2 da a^5bc, que pongo despues del signo —; continúo: + por — da —, que como se ha de restar es +; a^3bc por $2ab$ es $2a^4b^2c$, que pongo despues del signo +; + por + da +, que como se ha de restar será —; a^3bc por b^2 da a^3b^3c, que pondré tambien; tiraré una raya para poner debajo de ella la resta que quede despues de hecha la destruccion; pero advirtiendo que $+a^5bc$ de arriba con $-a^5bc$ de abajo se destruyen, que $-2a\ b^2c$ se destruye con $+2a^4b^2c$, y $+a^3b^3c$ con $-a^3b^3c$, pongo debajo de la raya lo que queda, que es $-a^3c^2+2a^2bc^2-ab^2c^2$.

El 1.er término de esta resta $-a^3c^2$, le dividiré por a^2 primero del divisor, lo que dará $-ac^2$; mul-

tiplico y resto, diciendo: — por + da —, y como se ha de restar es +, que pongo debajo del signo — del $-a^3c^2$; a^2 por ac^2 es a^3c^2 que pongo; continúo $-ac^2$ por $-2ab$ es $+2a^2bc^2$, que como se ha de restar pongo $-2a^2bc^2$; sigo: $-ac^2$ por b^2 es $-ab^2c^2$, que como se ha de restar será $+ab^2c^2$; y como estos términos se destruyen con sus correspondientes, pondré debajo de la raya o por resta, y tengo que el cociente será a^3bc-ac^2.

Dem. El ordenar es una operacion que se puede hacer, porque esto no altera el valor de los términos de la division; y se debe practicar, porque muchas cantidades (como la anterior) que ordenadas dan cociente exacto, no le darian sin esta circunstancia, y el resultado debe ser siempre el mas sencillo.

Todo lo demas es enteramente análogo al procedimiento aritmético (53), y se reduce á buscar los diferentes términos de un polinomio que multiplicado por el divisor dé el dividendo, que es L.Q.D.D.

Esc. La multiplicacion del cociente por el primer término del divisor se puede omitir; porque como dará el 1.er término del dividendo, y se ha de restar de él, se podrá tachar inmediatamente el 1.er término del dividendo y multiplicar desde el 2.º del divisor en adelante, que es lo que se ve en el ejemplo siguiente.

Si quiero dividir a^6-b^6 por a^2-b^2, haré la operacion como aquí se presenta.

$$\begin{array}{l|l} a^6-b^6 & a^2-b^2 \\ \quad +a^4b^2 & \overline{a^4+a^2b^2+b^4} \\ \quad\quad +a^2b^4 & \\ \quad\quad\quad +b^6 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Donde veo que sale cociente exacto, porque el $+b^6$ que resulta, se destruye con el $-b^6$ del dividendo.

De los quebrados literales.

121 Los quebrados literales ó algebráicos se calculan del mismo modo que los numéricos; porque todas las demostraciones que dimos respecto de estos,

estaban concebidas en términos generales. Así, su valor no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad. Por esta causa se reducirán á un comun denominador del mismo modo que aquellos (68); de manera que si tengo los quebrados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$,

quedarán reducidos á un comun denominador, si multiplico los dos términos del primero por dnq, los del segundo por bnq, los del tercero por bdq, y los del cuarto por bdn, cuya operacion los transformará en

$$\frac{adnq}{bdnq}, \frac{cbnq}{bdnq}, \frac{mbdq}{bdnq}, \frac{bdnp}{bdnq}.$$

Igualmente, si se dan quebrados con factores ó letras comunes arriba y abajo, se podrán suprimir y quedarán simplificados. Así, $\frac{ad}{d^2c} = \frac{a}{dc}$, y $\frac{ad+ba}{d^2+bd} = \frac{a}{d}$; pues en el numerador y denominador del primero es comun la d, y en los dos términos del segundo es comun el factor $d+b$, que suprimido se convertirá el quebrado en lo que hemos puesto.

122 Para sumarlos *se hará lo mismo que con los numéricos* (70).

De manera que $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} + \frac{bm}{bn} = \frac{an+bm}{bn}$.

123 Para restarlos *se hará lo mismo que con los numéricos* (73). Así, si de $\frac{a}{b}$ quiero restar $\frac{m}{n}$, tendré

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} - \frac{bm}{bn} = \frac{an-bm}{bn}.$$

124 Para reducir aquí un entero á la especie del quebrado que le acompaña, ya sea por via de suma ó de resta, *se multiplica el entero por el denominador*

del quebrado, con esto se suma el numerador del quebrado cuando este lleva el signo $+$, *ó se resta cuando lleva el* $-$, *y á todo esto se le pone por denominador el del quebrado.* Sea la espresíon $a^2+b^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}$ la que se quiera reducir; multiplicaré el entero a^2+b^2 por el denominador b^2-a^2, que me da (116 esc.) b^4-a^4; con esto sumaré el numerador a^4, y á la suma le pondré por denominador el del quebrado, en esta forma:

$$a^2+b^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}=\frac{(a^2+b^2)(b^2-a^2)+a^4}{b^2-a^2}=$$

$$=\frac{b^4-a^4+a^4}{b^2-a^2}=\frac{b^4}{b^2-a^2}.$$

125 Para multiplicarlos *se hace lo dicho* (76); de manera que

$$\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{am}{bn} \text{ y } \frac{a+m}{c^2-n^2}\times\frac{a-m}{c^2+n^2}=\frac{(a+m)(a-m)}{(c^2-n^2)(c^2+n^2)}=\frac{a^2-m^2}{c^4-n^4}$$

Y para multiplicar un quebrado por un entero ó al contrario, *se multiplicará el numerador del quebrado por el entero*, como aquí se ve:

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}, \text{ y } (a^2+b^2)\frac{m}{n}=\frac{(a^2+b^2)m}{n}=\frac{a^2m+b^2m}{n}.$$

126 Para dividirlos *se ejecutará lo dicho* (79); de manera que

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{an}{bm}; \text{ y } \frac{a+m}{c+n}:\frac{c-n}{a-m}=\frac{(a+m)(a-m)}{(c+n)(c-n)}=\frac{a^2-m^2}{c^2-n^2}.$$

Si se tratase de dividir un entero por un quebrado, *se practicaría lo dicho* (80); así, $a:\frac{c}{d^2}=\frac{ad^2}{c}$.

Para dividir un quebrado por un entero, *se practicará lo dicho* (81); así,

$$\frac{a}{b}:m=\frac{a}{bm}, \text{ y } \frac{a^2b}{c^2-n}:d^3=\frac{a^2b}{(c^2-n)d^3}=\frac{a^2b}{c^2d^3-nd^3}.$$

De la elevacion á potencias y estraccion de raices de los monomios.

127 Se llama en general *potencia* de una cantidad, al *producto* de multiplicar dicha cantidad por sí misma cierto número de veces; si se multiplica una vez, resulta la *segunda* potencia ó *cuadrado*; si se multiplica dos veces, resulta la *tercera* ó *cubo*; si tres, la *cuarta*; y si n, la potencia del grado $n+1$. La cantidad que se multiplica se llama *raiz*; y en general, se llama raiz de una cantidad *aquella que multiplicada por sí misma cierto número de veces produce la cantidad primitiva.*

128 Para indicar que una cantidad se ha de elevar á una potencia, si consta solo de una letra, basta ponerle á su derecha un poco mas alto el número que espresa la potencia á que se ha de elevar; y si la cantidad tiene mas de una letra ó tiene esponente, se encierra dentro de un paréntesis, y fuera de este se coloca un poco mas elevado el número que espresa la potencia, el cual se llama *esponente* de la potencia. Así, para indicar que la cantidad $2ab$ se ha de elevar al cuadrado, se escribirá $(2ab)^2$, que (106) se lee: *dos* ab *elevado á dos*; $(2ab)^3$ se lee: *dos* ab *elevado á tres*; y $(2ab)^n$ se lee: *dos* ab *elevado á n.*

Los grados de las potencias se han deducido del número de veces que entra por factor la raiz, que son tantas como unidades tiene el esponente; por lo que toda cantidad sin esponente ó con 1, es su *primera* potencia. Las multiplicaciones son tantas ménos una como unidades tiene el esponente.

La elevacion á potencias es el caso particular de la multiplicacion, en que los factores son iguales; pero aquí solo se necesita atender: 1.° á *signos*, 2.° á *coeficientes* y 3.° á *esponentes.*

1.° *Si el esponente de la potencia es número par, el signo de la potencia será siempre +; y si es impar, el signo que lleve la potencia será el que tenga la raiz.* Porque si la raiz lleva el signo +, combinado cualquier número de veces siempre dará +; pero si lleva —, cuando el esponente sea par, como un número par de signos — en la multiplicacion producen +, y un número impar producen —, resulta la regla de los signos.

2.° De los coeficientes *se formará la potencia que diga el esponente*, esto es, *se multiplicarán por sí mismos tantas veces ménos una como unidades tenga el esponente*; porque en la operacion de multiplicar, los coeficientes se multiplican (114) los unos por los otros, y aquí dichos coeficientes son iguales.

3.° En punto á esponentes *se multiplicará el de la cantidad por el de la potencia.* Porque en la multiplicacion se suman; y aquí habrá que sumar cada esponente consigo mismo, tantas veces como unidades tenga el de la potencia, que equivale á multiplicarlos.

Cor. De lo dicho (125) y de lo que acabamos de manifestar, se infiere que para formar potencias de quebrados, *se formará la del numerador y denominador.*

Aplicando las reglas á estos ejemplos se tendrá

1.° $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2\times 3}$;

2.° $(-4ab^3n^5)^5 = -4^5a^5b^{15}n^{25} = -1024a^5b^{15}n^{25}$;

3.° $(6a^2b^nc^r)^m = 6^m a^{2m} b^{nm} c^{rm}$;

4.° $\left(\frac{3a^2b^3c^4}{4e^2d^5f^3}\right)^3 = \frac{(3a^2b^3c^4)^3}{(4e^2d^5f^3)^3} = \frac{27a^6b^9c^{12}}{64e^6d^{15}f^9}$.

Los cuales manifiestan que *la potencia de un producto ó de un quebrado, es lo mismo que el producto ó cociente de la misma potencia de cada uno de los factores ó términos del quebrado.*

129 Para indicar que se ha de proceder de la

potencia á la raiz, se usa del *signo radical* $\sqrt{}$; entre sus ramas ó piernas se pone el *esponente radical*, que es el número que espresa el grado de la raiz que se quiere estraer; y debajo del signo se pone la cantidad cuya raiz se quiere sacar.

Como estraer raices es *buscar una cantidad, que entrando por factor tantas veces como unidades tiene el esponente radical, produzca la cantidad dada, que se considera como potencia*: estableceremos por regla.

1.° *Si el esponente radical es par, la raiz llevará el signo de ambigüedad; y si el esponente radical es impar, la raiz llevará el mismo signo de la cantidad.* Porque cuando la potencia es de grado par, siempre tiene (128, 1.°) el signo +, bien tenga la raiz el + ó el —; y cuando la potencia es de grado impar lleva el mismo signo que tenia la raiz.

2.° De los coeficientes *se dejará indicada la operacion debajo del radical*, hasta que se sepan estraer las raices de los números.

3.° *En punto á esponentes, se dividirá el esponente de la cantidad por el del radical.* Porque esta operacion es la inversa de elevar á potencias, y en este operacion se multiplican.

Así, si quiero estraer la raiz cuadrada de a^6b^8, observaré que ocurriendo con mucha frecuencia el estraer raices cuadradas, se omite el esponente 2 del radical; de modo que $\sqrt{a^6b^8}$ es lo mismo que $\sqrt[2]{a^6b^8}$; y ejecutando la operacion del modo que acabamos de

decir, será 1.° $\sqrt{a^6b^8} = \pm a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{8}{2}} = \pm a^3b^4$;

2.° $\sqrt[3]{-a^6b^{12}c^9} = -a^2b^4c^3$;

3.° $\sqrt[n]{7a^5b^rc^sd^3} = \sqrt[n]{7} \times a^{\frac{5}{n}} b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}} d^{\frac{3}{n}}$.

Si fuesen quebrados, *se estraerá la raiz del nu-*

merador y la del denominador, en esta forma:

$$\sqrt{\frac{a^8}{b^6}}=\pm\frac{a^{\frac{8}{2}}}{b^{\frac{6}{2}}}=\pm\frac{a^4}{b^3};\ \sqrt[n]{\frac{a^m b^r c^5}{d^7 f^8 e^s}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{r}{n}}\, c^{\frac{5}{n}}}{d^{\frac{7}{n}}\, f^{\frac{8}{n}}\, e^{\frac{s}{n}}};$$

lo cual está fundado en que para elevar á potencias un quebrado, se ha de elevar el numerador y el denominador; por lo que aqui se deberá seguir la regla contraria; de donde se deduce que *la raiz de un producto ó de un quebrado es lo mismo que el producto ó cociente de las raices de los factores, ó términos del quebrado.*

130 Cuando la division de los esponentes no se puede hacer exactamente, aun debe permanecer radical en la espresion; pero se debe sacar de él todo lo que se pueda; *para lo cual del esponente fraccionario que resulta de quitar el radical, se sacan los enteros que se puedan; y aquella cantidad se descompone en factores poniendo por primer factor la cantidad con el esponente entero, y por segundo la misma cantidad con el esponente quebrado; y luego se vuelve á restablecer el radical poniendo entre sus piernas el denominador del quebrado, y debajo de él la cantidad con el numerador del quebrado por esponente.*

Así, si quiero estraer la raiz cúbica de $a^5b^7c^6$, ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$\sqrt[3]{a^5b^7c^6}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{6}{3}}=a^{1\frac{2}{3}}b^{2\frac{1}{3}}c^2=$$

$$aa^{\frac{2}{3}}b^2b^{\frac{1}{3}}c^2=ab^2c^2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=ab^2c^2\sqrt[3]{a^2b}.$$

Esto está fundado (129) en que la raiz de un producto de tantos factores como se quiera, es igual al producto de las raices del mismo grado de los factores.

131 Estas cantidades que están afectas del signo $\sqrt{}$ se llaman *cantidades radicales*; así, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, &c.

son cantidades radicales; cuando a y b se representen por números, podrá suceder que a v. g. sea un número cuadrado como 1, 4, 9, 16 &c. ó $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ &c, y que b sea un número cúbico, como 1, 8, 27, &c. ó $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$ &c. En este caso el radical desaparecerá; pero cuando no sea ninguno de estos números, como cuando a valga 2, 3, 5, &c. y b sea 2, 3, 4, 5, &c. no tiene raiz exacta; y es imposible hallar un número entero ni quebrado que esprese el valor de estos radicales; por lo cual $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ &c. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$ &c., se llaman *números sordos*, *irracionales* ó *incomensurables*.

132 Con los radicales se hacen las mismas operaciones que con las demas cantidades.

La suma y la resta se ejecutan en un todo lo mismo; solo que para que los términos sean semejantes han de tener un mismo esponente radical, y unas mismas letras y esponentes fuera del radical y debajo.

133 Para multiplicarlos, si el radical es de un mismo grado *se pondrá* (129) *debajo del radical el producto de las cantidades; y despues se verá si se puede sacar algo de debajo del radical* (130).

Por ejemplo: $\sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt[4]{a^2bc^2} = \sqrt[4]{a^5b^2c^2} = a\sqrt[4]{ab^2c^2}$.

Cuando los radicales no tienen un mismo esponente, se reducen á él *multiplicando los esponentes de cada cantidad y de cada radical, por el producto de los esponentes de los radicales de los demas.*

Esto está fundado en lo dicho (68); pues si se quitan los radicales poniendo á las letras esponentes fraccionarios (130), no habrá mas diferencia si no que aquí los esponentes de los radicales hacen oficios de denominadores, y los de las letras hacen oficios de numeradores. Así, si quiero reducir á un mismo esponente radical los $\sqrt[3]{a^2b^2}$, $\sqrt[4]{a^3b^2}$, $\sqrt{an}$, multiplicaré primero todos los esponentes radicales dicien-

do: 3 por 4 son 12; 12 por 2 esponente del tercero son 24, y este será el esponente comun del radical; ahora, para saber los que deben tener las cantidades que se hallan debajo de cada radical, multiplicaré los esponentes de las letras que se hallan debajo del primero por 8, producto de 4 por 2; los de las que se hallan debajo del segundo por 6, producto de 3 por 2; y los de las que se hallan debajo del tercero por 12, producto de 3 por 4; de manera que dichos radicales los tendré reducidos á

$$\sqrt[24]{a^{16}b^{16}},\ \sqrt[24]{a^{18}b^{12}},\ \sqrt[24]{a^{12}n^{12}};$$

y si los quisiera multiplicar sacaria por producto

$$\sqrt[24]{a^{16}b^{16}}\times\sqrt[24]{a^{18}b^{12}}\times\sqrt[24]{a^{12}n^{12}} =$$

$$\sqrt[24]{a^{46}b^{28}n^{12}} = ab\sqrt[24]{a^{22}b^{4}n^{12}}.$$

134 Para dividirlos, cuando los radicales tengan un mismo esponente, quedará hecha la division (129) con *poner debajo de un radical del mismo grado el cociente de las cantidades que haya debajo.*

Luego $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{a^2b^3cd^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^3b^2c}{a^2b^3cd^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bd^2}}.$

Si no tienen el mismo esponente radical, se reducirán á él, como se ve en el ejemplo siguiente:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2bc^2}}{\sqrt[4]{a^2b^3d^2}} = \frac{\sqrt[12]{a^8b^4c^8}}{\sqrt[12]{a^6b^9d^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^8b^4c^8}{a^6b^9d^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^2c^8}{b^5d^6}}.$$

135 Para elevarlos á una potencia cualquiera basta (133) *elevar la cantidad que está debajo á la misma potencia, dejando el mismo esponente del ra-*

dical; porque elevar $\sqrt[5]{a^3b^4}$ á la segunda potencia, es efectuar el producto

$$(\sqrt[5]{a^3b^4})^2=\sqrt[5]{a^3b^4}\times\sqrt[5]{a^3b^4}=\sqrt[5]{a^6b^8}=ab\sqrt[5]{ab^3}$$

Como estraer raices es lo contrario de elevar ó potencias, para estraer la raiz de una cantidad radical, *se dividirá el esponente de la cantidad que haya debajo, por el esponente de la raiz que se quiera sacar, y al resultado se le pondrá el mismo radical.*

Así, $\sqrt[3]{\sqrt[8]{a^6b^3c^3}}=\sqrt[8]{a^2bc}$; pero como no siempre se podrá ejecutar la division exactamente, con el fin de que en el resultado sólo haya un radical, *se multiplica el esponente del radical primitivo por el de la raiz que se quiere sacar, sin llegar á las cantidades que hay debajo del signo radical.* Así,

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2b^2c}}=\sqrt[15]{a^2b^2c}.$$

De las espresiones imaginarias.

136 Hemos visto (128) que al elevar una cantidad á una potencia par, siempre resultaba el signo +; de donde se deduce que ninguna cantidad negativa puede ser potencia de grado par; luego si nos pidiesen una raiz de grado par de una cantidad negativa, se nos pedia un imposible; no obstante ocurre esto con mucha frecuencia, y por esta causa á estas espresiones se les ha dado el nombre de *imaginarias.*

Así, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^3}$, $\sqrt[6]{-b^5}$, $\sqrt[2n]{-a^m}$ son espresiones imaginarias.

Antes de enseñar cómo se calculan, demostrarémos esta proposicion.

Toda espresion imaginaria se puede dsscomponer

en dos factores: el uno real que será un radical del mismo grado, que contenga debajo de sí la cantidad real; y el otro un radical del mismo grado que contenga debajo de sí la unidad con el signo negativo.

En efecto, sea la espresion $\sqrt[2n]{-a^m}$, y se tendrá que como toda cantidad se puede considerar multiplicada por la unidad, será

$$-a^m = -1a^m = +1\times -a^m = -1\times +a^m;$$

luego $\sqrt[2n]{-a^m} = \sqrt[2n]{a^m \times -1} = (\S\ 129) a^{\frac{m}{2n}} \times (-1)^{\frac{1}{2n}}$;

y restableciendo los radicales será $\sqrt[2n]{a^m} \times \sqrt[2n]{-1}$, que era L. Q. D. D. (*)

137 Con las imaginarias se hacen las mismas operaciones que con las cantidades reales. La suma y la resta se practican por las reglas dadas (132).

138 Para multiplicarlas *se descompondrán ántes*

(*) *Mr. A. L. Cauchy, Ingeniero de Puentes y Calzadas, en su* Curso de Análisis *de la Escuela Politécnica, dice, que* toda ecuacion imaginaria es la representacion simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales. *Por ejemplo, la ecuacion simbólica* $a+b\sqrt{-1} = c+d\sqrt{-1}$ *equivale solo á las dos ecuaciones reales* $a=c$, $b=d$,

Este sabio profesor, con quien he tenido el honor de conversar en Paris, ha desenvuelto con mucha maestría varios puntos de Análisis; y se espera con sólido fundamento que simplificará y aclarará otros varios, que no se hallan esplicados con la debida exactitud. A mí me resulta la gran satisfaccion de haber coincidido algun tanto con sus ideas, y aun haberlas llevado algo mas adelante.

En efecto, en el Resúmen de sus lecciones dadas en la Escuela Politécnica sobre el cálculo infinitesimal, *impreso en 1823, reconociendo la incertidumbre*

en sus dos factores, y despues se ejecutará la operacion como en los radicales; así, para multiplicar

$\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$, descompondré á

$\sqrt{-a}$ en $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, y á $\sqrt{-b}$ en $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$,

y la multiplicacion la haré en esta forma:

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}=$$
$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}}\times(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}\times(-1)^{1}=$$
$$\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$$

Observando este resultado, echarémos de ver que *el producto de dos imaginarias de segundo grado es una cantidad real*; y que *el signo que nos resulta es contrario al que daria la multiplicacion* (114); pues teniendo $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ los signos positivos, deberá salir el producto positivo, y vemos que es negativo.

139 Para dividirlas se descompondrán tambien

---

de los resultados á que puede uno ser conducido por el empleo de series divergentes, trata de evitar estos inconvenientes, y dice en la advertencia de dicha obra, que espera, que los que la lean, se convencerán de que los principios del Cálculo diferencial y sus importantes aplicaciones se pueden esponer fácilmente sin la intervencion de las series. *Y como yo esplico los principios de dicho Cálculo, tanto en mi tratado elemental compuesto en* 1807 *é impreso en* 1813, *como en este compendio, sin suponer conocido el desarrollo de las series, resulta que me he anticipado diez y seis años en este asunto; y si se tiene presente que Mr. Cauchy supone ya conocida la fórmula del binomio de Neuton, y que yo esplico los principios del espresado Cálculo diferencial, sin suponer demostrada de antemano dicha fórmula, no se estrañará el que yo haya asegurado haber llevado algo mas adelante las ideas de Mr. Cauchy.*

en factores el dividendo y el divisor; así, será

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\,\sqrt{-1}};$$

y como $\sqrt{-1}$ arriba y $\sqrt{-1}$ abajo se pueden suprimir, quedará $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$(§ 134) $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

140 Si se multiplican entre sí dos binomios de esta forma $A+B\sqrt{-1}$, pero que en cada uno sea diferente el signo del radical, el producto será una cantidad real; v. g. si multiplico $A+B\sqrt{-1}$ por $A-B\sqrt{-1}$, tendré $(A+B\sqrt{-1})\,(A-B\sqrt{-1})=A^2+AB\sqrt{-1}-AB\sqrt{-1}+B^2=A^2+B^2$.

De donde se deduce una regla para descomponer en factores la suma de dos cantidades, cuya operacion es muy socorrida en la práctica, y es: que *se ponga la raiz cuadrada de uno de los términos en ambos factores por primer término, y por segundo la raiz del otro multiplicada por* $\sqrt{-1}$, *pero con diferente signo en cada factor*; de manera que $a^4+b^4=(a^2+b^2\sqrt{-1})\,(a^2-b^2\sqrt{-1})$.

SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA.

De la análisis algebráica, y resolucion de las ecuaciones de primer grado.

141 Se llama *ecuacion* la igualdad de dos cantidades, como $c=a+b$; lo que se pone á la izquierda del signo $=$, se llama *primer miembro*; y lo que se pone á la derecha, *segundo miembro*; y cada una de las cantidades que los forman, se llaman *términos*. La parte del Álgebra que trata de resolver los problemas despues de puestos en ecuacion, se llama *a-*

nálisis; cuyo espíritu consiste en suponer conocido lo mismo que se trata de averiguar.

Como en los problemas entran cantidades conocidas, que se llaman *datos*, y desconocidas que se llaman *incógnitas*, las conocidas se señalan con las primeras letras a, b, c, &c., del alfabeto; y las incógnitas con las últimas z, y, x, u, &c.

142 Señaladas las cantidades con letras, se pasa á *plantear el problema*, que es cifrar en ecuaciones todas las condiciones que contiene. Para plantear bien un problema es necesario leerle tres ó cuatro veces, hacerse cargo bien del sentido absoluto y terminante de las palabras, y condiciones á que han de satisfacer las cantidades, y escribir los signos correspondientes. Es, por consiguiente, el planteo de un problema, una rigorosa traduccion del lenguaje comun al lenguaje algebráico; y así, para poder ejecutarle con alguna facilidad, se tendrá entendido que las palabras *sumado, agregado, aumentado en* &c. y sus sinónimas, conducen á poner el signo $+$; las *restado de*, *quitado*, *disminuido en*, &c. y sus sinónimas quedan traducidas poniendo el signo $-$; las *multiplicado por*, *tantas veces mayor* &c. conducen á poner el signo $\times$; las *dividido por*, *tantas veces menor*, &c. conducen al signo : ó *raya* de la division; las *tal potencia* &c. al de elevar á potencias; y las *estraer tal raiz* &c. al signo radical; y las palabras *dé*, *componga*, *resulte*, *salga*, y todas sus equivalentes, quedan traducidas escribiendo el signo $=$.

Cuando planteado un problema se hallan tantas ecuaciones como incógnitas, la cuestion es *determinada*; cuando resultan ménos ecuaciones que incógnitas, es *indeterminada*; y cuando resultan mas ecuaciones que incógnitas, se deberia llamar *mas que determinada*; pero en este caso la cuestion ó es absurda, ó es inútil alguna condicion de las que se dieron; por lo que no se considera esta clase de cuestiones.

Cuando en una ecuacion, considerada por sí sola, no hay mas de una incógnita, se dice que es *de-*

terminada; pero cuando hay dos ó mas incógnitas, se dice que es *indeterminada*.

143 Las ecuaciones, sean determinadas ó indeterminadas, se dividen en *grados*, tomando el nombre del mayor esponente que tiene la incógnita; así, $a+bx=cx+d+e$ es una ecuacion de 1.er grado, porque la incógnita x sólo se halla elevada á la primera potencia; y es determinada, porque sólo contiene la incógnita x. La ecuacion $ax^2+bx=c+dx$ es de 2.° grado, porque el mayor esponente de la incógnita es 2; y es determinada, porque sólo contiene la incógnita x; y la ecuacion $ax^2+bx^9+d=cx^3$ es de 9.° grado; y es determinada por la misma razon que las anteriores.

Las ecuaciones indeterminadas tambien toman el nombre del mayor esponente de las incógnitas; pero como puede haber términos donde se hallen multiplicadas ó divididas entre si, para averiguar el grado de la ecuacion, se suman los esponentes de las incógnitas que se hallan en el término que hay mas dimensiones desconocidas. V. g. la ecuacion $ax=bz+d$ es indeterminada, porque tiene dos incógnitas; y es de 1.er grado, porque en un mismo término sólo se halla una incógnita, y es con la unidad por esponente; la ecuacion $ax^3+bz^3x^4=ax^2+cd$, es indeterminada, porque tiene dos incógnitas; y ademas es de 7.° grado, porque en el segundo término del primer miembro se hallan dos incógnitas, la una con el esponente 3, y la otra con 4; luego en este término hay siete dimensiones desconocidas.

Cuando las ecuaciones son de un grado mas elevado al primero, pueden ser de dos maneras: *puras* ó *incompletas*, que son aquellas en que sólo se halla la incógnita con el esponente que da nombre á la ecuacion; ó *mistas*, *completas* ó *afectas*, que son aquellas en que, ademas del término donde se halla la incógnita con el esponente que da nombre á la ecuacion, se encuentra en otros términos con un esponente menor. V. g. $x^3+a=b$, $x^5+c=d$, ó

en general $x^n = e$, son ecuaciones puras de 3.°, 5.° y n.° grado. Las ecuaciones $x^3 + x + c = b$, $x^5 + ax^3 + bx = cd$, ó en general $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} +$ &c. $= c$, son ecuaciones mistas, completas ó afectas, de los mismos grados que las anteriores.

Esc. Cuando las cantidades conocidas que entran en las ecuaciones son números, como en estas: $x^2 + 3x = 38$, $z^3 + 2xz = 20$, &c. las ecuaciones se llaman *numéricas*; y cuando las cantidades conocidas están espresadas por letras, como en $x^3 + ax^2 + bx = c$, $x^2 + ax = b$, &c. las ecuaciones se llaman *literales* ó *algebráicas*. En estas, y siempre que en los cálculos entran cantidades conocidas enlazadas con las incógnitas, se da el nombre de coeficiente á toda la cantidad conocida que multiplica á la incógnita. V. g. en el término $2x$, el coeficiente es 2; y en la espresion $2ax$ el coeficiente es $2a$.

144 Como el espíritu analítico consiste en hallar una ó mas cosas desconocidas, en valores de las que se dan conocidas, todo el artificio de la análisis, cuando ya está planteado el problema, consiste en *determinar á qué cantidades conocidas es igual ó son iguales las incógnitas*; y las operaciones que se ejecutan para dejarla sola en un miembro, sin coeficiente, esponente, ni divisor, y con el signo positivo, se comprenden bájo el nombre de *despejo de las incógnitas*.

145 En el planteo de los problemas (142) se suelen encontrar muchas dificultades, porque las condiciones á que han de satisfacer las cantidades, están á veces tan intrincadas y enredosas, que parece imposible atinar con la operacion á que deben conducir; lo cual no sucede así en el despejo de las incógnitas, que está fundado en que *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales*; y ademas hay una regla para saber las operaciones que se han de hacer, que *son las contrarias de las que esten indicadas con las cantidades que afectan á las incógnitas.*

146 En efecto, 1.° cuando la incógnita se halla sumada con otra cantidad, queda despejada *pasando por via de resta al otro miembro la cantidad que sumaba á la incógnita.* V. g. si se tiene $x+a=b$, quedará despejada la x pasando el término $+a$ al otro miembro con el signo $-$, de este modo $x=b-a$; porque siendo $x+a=b$, si de ambos miembros quitamos la a, será $x+a-a=b-a$; pero en el primer miembro $+a$ y $-a$ se destruyen, luego quedará $x=b-a$.

147 2.° Cuando una cantidad afecta á la incógnita por via de resta, queda despejada *pasando al otro miembro dicha cantidad por via de suma.* Por ejemplo, si se tiene $x-a=b$, será $x=b+a$; porque si á ambos miembros de la ecuacion añadimos una misma cantidad a, se tendrá $x-a+a=b+a$; y como $-a$ y $+a$ se destruyen, quedará $x=b+a$.

Cor. De estos dos casos se deduce que *para pasar un término de un miembro á otro basta mudarle el signo*; y que *si al fin de un cálculo resulta la incógnita con el signo* $-$, *se podrá poner con el signo* $+$, *mudando los signos á toda la ecuacion*; porque esto equivale á trasladar los términos de un miembro á otro; así, si tuviese $-x=a-b$ podria poner $x=b-a$.

148 3.° Cuando una cantidad multiplica á la incógnita, quedará esta despejada *partiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita.* V. g. si se tiene $ax=b$, resultará $x=\frac{b}{a}$; porque si dividimos ambos miembros de dicha ecuacion por a, se tendrá $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$; y como a arriba y a abajo se pueden suprimir (61, 4.°), quedará $x=\frac{b}{a}$.

149 4.° Cuando una cantidad divide á la incógnita, se despeja esta *multiplicando el otro miembro por lo que divide á la incógnita.* V. g. si se tiene

$\frac{x}{a}=b$, será $x=ab$; porque multiplicando ambos miembros de la ecuacion por a, se tendrá $\frac{ax}{a}=ab$; y suprimiendo en el primer miembro a arriba y abajo (61, 4.°) será $x=ab$.

150. Al despejar una incógnita no siempre se presentan ecuaciones tan sencillas como las que hemos considerado hasta ahora, sino que se hallan á un tiempo enlazadas con las incógnitas las cantidades conocidas, por via de suma, resta, multiplicacion y division; y en este caso para despejarla, lo primero que se hace es *pasar* (147 cor.) *al primer miembro todos los términos donde se halla la incógnita, y al segundo todos aquellos donde no se halla. Despues se quitan todos los divisores de los términos donde hay incógnita, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demas; luego, se descompondrá el primer miembro en dos factores, sacando la incógnita fuera de un paréntesis, y encerrando dentro de él lo que la multiplique; y finalmente, quedará despejada dividiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita, que es lo que se halla dentro del paréntesis.*

Así, si quiero despejar la incógnita en esta ecuacion $3x-a+\frac{2x}{b}+ax=\frac{4dx}{7}+n-\frac{x}{3c}$, primero pasaré al primer miembro los términos $\frac{4dx}{7}$ y $-\frac{x}{3c}$ del segundo, y el $-a$ al segundo, mudándoles los signos, y tendré

$$3x+\frac{2x}{b}+ax-\frac{4dx}{7}+\frac{x}{3c}=n+a \text{ (A)};$$

ahora quitaré los divisores, multiplicando el $3x$ por $21bc$, producto de los divisores b, 7 y $3c$, de los de-

mas; el $\frac{2x}{b}$ por $21c$, producto de 7 y $3c$; el ax por $21bc$, producto de b, 7 y $3c$; el $-\frac{4dx}{7}$ por $3bc$, producto de b y $3c$; el $\frac{x}{3c}$ por $7b$, producto de b y de 7; todo el segundo miembro se multiplicará por $21bc$, producto de los divisores b, 7 y $3c$, y se tendrá $63bcx+42cx+21abcx-12bcdx+7bx=(n+a)21bc$.

Esta trasformacion no altera la ecuacion (A), porque equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto $21bc$ de todos los divisores; pues en el término donde haya alguno, queda hecha la multiplicacion con suprimirle (66 cor.).

Ahora, sacando la x fuera de un paréntesis que contenga todo lo que la multiplica, se tendrá

$$x(63bc+42c+21abc-12bcd+7b)=(n+a)21bc;$$

y dividiendo por lo que multiplica á la incógnita, resultará $x=\frac{(n+a)\times 21bc}{63bc+42c+21abc-12bcd+7b}$.

Cor. De aquí se deduce que *una cantidad que en un miembro se halla como factor puede pasar al otro por divisor*; y al contrario, *toda cantidad que se halla por divisor puede pasar por factor al otro miembro*; y que quitar los divisores de una ecuacion *equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos ellos.*

151 Cuando la incógnita se halla elevada á potencias en una ecuacion pura, se despeja *estrayendo del otro miembro una raiz del mismo grado que el de la potencia.* V. g. si se tiene $x^n=b$, quedará despejada la x poniendo $x=\sqrt[n]{b}$; porque si estraemos de ambos miembros la raiz n, será $\sqrt[n]{x^n}=\sqrt[n]{b}$; pero $\sqrt[n]{x^n}=x^{\frac{n}{n}}=x^1=x$, luego $x=\sqrt[n]{b}$.

Si n es un número par, se deberá poner el signo $\pm$; de manera que si fuese $x^2 = a^2$, resultaria $x = \pm a$.

152 Si se hallase la incógnita debajo de algun radical, quedaria despejada *elevando el otro miembro á una potencia del mismo grado que el radical.* V. g. si se tuviese $\sqrt[n]{x} = b$, resultaria $x = b^n$; porque si elevamos á n los dos miembros de la ecuacion $\sqrt[n]{x} = b$, resultará $(\sqrt[n]{x})^n = (§\ 135) x = b^n$.

153 Cuando al plantear una cuestion hay tantas ecuaciones como incógnitas, dicha cuestion es determinada (142); para despejar en este caso cada incógnita se pueden seguir tres métodos diferentes; pero aqui solo esplicarémos el usado mas generalmente que es el de *sustitucion.*

Este consiste *en determinar en la ecuacion mas sencilla la incógnita mas sencilla, y sustituir su valor en las demas; luego, en la ecuacion mas sencilla que resulte, se determinará la incógnita mas sencilla, y se sustituirá su valor en las demas; y así se continuará hasta que solo se tenga una ecuacion con una incógnita; en cuyo caso se despejará; y sustituyendo su valor en los anteriores, quedarán despejadas todas las incógnitas.*

Propongámonos despejar las incógnitas en este sistema de ecuaciones (A).

Para esto determinaré en la primera una cualquiera de ellas tal como la x, y tendré $x = a + u - z$.

$$\left.\begin{array}{ll} (1.^a) & x - u + z = a \\ (2.^a) & x + u - z = b \\ (3.^a) & x - u - z = c \end{array}\right\} (A)$$

Sustituiré este valor de x en las dos de abajo y se convertirán en (B), ó simplificando en (C);

$$\left.\begin{array}{l} a + u - z + u - z = b \\ a + u - z - u - z = c \end{array}\right\} (B) \qquad \left.\begin{array}{l} a + 2u - 2z = b \\ a - 2z = c \end{array}\right\} (C);$$

y como en la segunda de estas ecuaciones no hay mas de la incógnita z, la despejaré por lo dicho (150) y

será $z=\frac{a-c}{2}=\frac{1}{2}(a-c)$ (*).

Sustituyendo en vez de z su valor en la primera de las (C), ó desde luego en vez de $-2z$ su valor $c-a$, tendré: $a+2u+c-a=b$, ó $2u+c=b$, que (150) da $u=\frac{1}{2}(b-c)$.

Sustituyendo estos valores de z y de u en el de x, será $x=a+u-z=a+\frac{1}{2}(b-c)-\frac{1}{2}(a-c)$; que, reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, se convierte en

$$x=\frac{2a+b-c-a+c}{2}=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(a+b).$$

Con lo cual quedan despejadas las tres incógnitas. Entendido esto, vamos á resolver algunas cuestiones.

154. 1.ª *Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.*

Res. y *Dem.* Sea s la suma dada, y d la diferencia; sea x la cantidad mayor que se pide, y z la menor, y el problema quedará planteado en estas dos ecuaciones.

$$x+z=s$$
$$x-z=d$$

Determinando z en la primera, será $z=s-x$; cuyo valor sustituido en la segunda da

$$x-s+x=d \text{ ó } 2x=s+d;$$

de donde (§ 148) $x=\frac{1}{2}(s+d)=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$; y sustituyendo este valor en el de z, se tendrá

$$z=s-\frac{s+d}{2}=\frac{2s-s-d}{2}=\frac{s-d}{2}=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d.$$

Cuyos resultados manifiestan que *la cantidad mayor* x *es igual á la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia; y la menor* z *á la mitad de la suma, ménos la mitad de la diferencia.*

(*) *Cuando tengamos cantidades divididas por números, les pondrémos ántes el coeficiente quebrado que les corresponda, poniendo la cantidad dentro de paréntesis, ó no, segun sea necesario.*

Así, si se pidiese hallar la edad de un padre y de un hijo, en el supuesto de que entre ambos tuviesen 60 años, y el padre llevase á su hijo 20, diria: la mitad de 60 es 30; la mitad de 20 es 10; sumando 30 y 10, será 40 la edad del padre, que es la mayor. Y para hallar la del hijo, que es la menor, diria: 30 ménos 10 son 20, que seria la edad del hijo; cuyas dos cantidades son tales que

$$40+20=60, \text{ y } 40-20=20.$$

155 2.ª *Hallar tres números tales, que si del duplo del primero se quitan los dos tercios de los otros dos, resulte 56; si del triplo del segundo se quitan los $\frac{5}{17}$ de los otros dos, resulte 48; y si del séptuplo del tercero se quitan las tres cuartas partes de los otros dos, resulte 39.*

Res. y *Dem.* Sean u, x, z, los tres números que se piden, y el problema quedará planteado en las tres ecuaciones (A), ó quitando los divisores en las (B).

$$\left.\begin{array}{l} 2u-\frac{2}{3}(x+z)=56 \\ 3x-\frac{5}{17}(u+z)=48 \\ 7z-\frac{3}{4}(x+u)=39 \end{array}\right\} (A) \qquad \left\{\begin{array}{l} 6u-2x-2z=168 \\ 51x-5u-5z=816 \\ 28z-3x-3u=156 \end{array}\right\} (B)$$

Determinando x en la primera de las (B), se tiene $x=\frac{1}{2}(6u-2z-168)=3u-z-84$; sustituyendo su valor en las otras dos, resulta

$$\left.\begin{array}{l} 51(3u-z-84)-5u-5z=816 \\ 28z-3(3u-z-84)-3u=156 \end{array}\right\}$$

ó efectuando las operaciones tendrémos

$$\left.\begin{array}{l} 153u-51z-4284-5u-5z=816 \\ 28z-9u+3z+252-3u=156 \end{array}\right\}$$

que reduciendo y trasladando sale

$$\left.\begin{array}{l} 148u-56z=816+4284=5100 \\ 31z-12u=156-252=-96 \end{array}\right\}$$

ó dividiendo la primera de estas dos por 4, resultará $\left\{\begin{array}{l} 37u-14z=1275 \\ 31z-12u=-96. \end{array}\right.$

Despejando z en la 1.ª da $z=\frac{1}{14}(37u-1275)$, cuyo valor sustituido en la segunda da

$$31\times\frac{1}{14}(37u-1275)-12u=-96;$$

quitando el divisor será

$$31(37u-1275)-168u=-1344;$$

haciendo la multiplicacion indicada tendrémos

$$1147u-39525-168u=-1344;$$

reduciendo y trasladando resultará

$$979u=-1344+39525=38181;$$

y despejando u, da $u=\frac{38181}{979}=39$.

Poniendo este valor de u en el de z resulta

$$z=\tfrac{1}{14}(37u-1275)=\tfrac{1}{14}(37\times39-1275)=$$
$$\tfrac{1}{14}(1443-1275)=\tfrac{1}{14}\times168=12;$$

y sustituyendo estos valores en el de x, darán

$$x=3u-z-84=3\times39-12-84=117-96=21.$$

Por consiguiente los tres números pedidos son 39, 21 y 12; los cuales satisfacen á las condiciones del problema, como cualquiera puede comprobar.

156 Las cuestiones suelen venir propuestas con adornos, como puede verse en estos dos ejemplos.

1.° Supónese una sala adornada con tres estatuas, de Juno, Júpiter y Febo, tales que las dos primeras pesan veinte minas (ó arrobas), y la tercera que pesa seis, es igual á la cuarta parte de la primera, mas la tercera parte de la segunda; se quiere saber cuánto pesa cada una, y se propone la cuestion en estos términos.

Juno y Júpiter pesan veinte minas;
Un cuarto del primero y un tercio del segundo
Componen al Dios Febo,
Que pesa seis, Lucero
De la aurora serás si me adivinas
Lo que pesa cada uno,
Juno sin Júpiter, Júpiter sin Juno.

Res. y *Dem.* Llamando x las minas que pesa Juno, Júpiter pesará $20-x$ (pues entre los dos pesan 20); y como $\frac{1}{4}$ de Juno y $\frac{1}{3}$ de Júpiter componen seis, el problema estará planteado en esta ecuacion $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}(20-x)=6$, de donde (150) sale $x=8$, peso de Juno; el de Júpiter será 12; y la cuestion queda resuelta.

2.° Supónese un Leon de bronce, que arroja

agua por los ojos, por un pie y por la boca, y se sabe el tiempo en que cada caño solo llena el pilon de la fuente; se trata de saber el tiempo en que le llenarán corriendo todos á la vez, y la cuestion se propone en estos términos.

El que fulminó incendios en el Cielo,
Y si me abrasa el Sol, abraso el mundo,
Hoy en la tierra convertido en hielo,
Por ojos, pies y boca, me difundo,
Y con néctar divino
Refresco al fatigado peregrino.
Este pilon de mármol esculpido,
Que en pocos dias ha sido fabricado,
En dos el primer ojo le ha llovido;
Pero en tres el segundo le ha llorado;
En quatro el pie le toca,
Y le escupo en seis horas por la boca.
Esto hace un caño solo,
¿Y todos juntos? Lo defina Apolo.
¿Y combinados? Tú lo has de hacer solo.

Res. y *Dem.* Sea t el tiempo que han de correr todos los caños á la vez, para llenar el pilon, que llamarémos p; y tendrémos que el primer ojo que llena el pilon en 2 dias, en 1 llenará....... $\frac{1}{2}p$;
el segundo ojo que le llenaba en 3 dias, en 1 llenará.. $\frac{1}{3}p$;
el pie que le llenaba en 4 dias, en 1 llénará. $\frac{1}{4}p$;
la boca que le llenaba en 6 horas ó $\frac{1}{4}$ de dia, en 1 dia llenará............................. $4p$;
ahora, sabiendo ya lo que cada caño llena en un dia, se sigue que corriendo el tiempo t todos juntos, arrojarán una cantidad de agua espresada por lo que cada uno arroja en un dia multiplicado por el tiempo; esto es, el primer ojo, en t dias ó tiempo, arrojará $\frac{1}{2}pt$; el segundo, $\frac{1}{3}pt$; el pie, $\frac{1}{4}pt$; y la boca $4pt$; y como toda el agua que han de arrojar en el tiempo t, se quiere que solo sea la del pilon p, se tendrá la ecuacion $\frac{1}{2}pt+\frac{1}{3}pt+\frac{1}{4}pt+4pt=p$;

que dividiéndola toda por p, será $\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t+\frac{1}{4}t+4t=1$; y multiplicándola toda por 12, se convertirá en

$$6t+4t+3t+48t=12,\ \text{ó}\ 61t=12;$$

de donde sale $t=\frac{12}{61}$ de dia $=$(§ 83) 4 horas, 43 minutos y 16,7 segundos.

Esc. El último renglon da oríjen á diez soluciones mas, que corresponden á averiguar el tiempo que tardarán los dos ojos solos, el primer ojo y el pie &c. como se ve en las respuestas siguientes.

1.ª Los dos ojos le llenarán en 1 dia, 4 horas y 48 minutos.

2.ª El primer ojo y el pie le llenarán en 1 dia y 8 horas.

3.ª El primer ojo y la boca le llenarán en 5 horas y 20 minutos.

4.ª El segundo ojo y el pie le llenarán en 1 dia, 17 horas, 8 minutos, 34,3 segundos.

5.ª El segundo ojo y la boca le llenarán en 5 horas, 32 minutos, 18,5 segundos.

6.ª El pie y la boca le llenarán en 5 horas, 38 minutos, 49,4 segundos.

7.ª Los dos ojos y el pie le llenarán en 22 horas, 9 minutos, 13,8 segundos.

8.ª Los dos ojos y la boca le llenarán en 4 horas, 57 minutos, 55,9 segundos.

9.ª El primer ojo, el pie y la boca, le llenarán en 5 horas, 3 minutos, 9,5 segundos.

10.ª El segundo ojo, el pie y la boca, le llenarán en 5 horas, 14 minutos, 10,9 segundos.

De *la elevacion al cuadrado de los polimonios, y estraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas.*

157 Queda dicho (127) que *cuadrado* es el producto de una cantidad por ella misma; así, multiplicando $a+b$ por $a+b$, se tendrá el cuadrado de $a+b$, como se ve en la página siguiente:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$ (A) que quiere decir que el cuadrado de una cantidad que se compone de dos partes, consta de tres, á saber: *de cuadrado de primera parte* (esto es lo que dice a^2); *de duplo de primera por segunda* (esto es lo que dice $2ab$); *y de cuadrado de segunda* (que es lo que espresa b^2).

Toda espresion que como la anterior suministra una regla práctica, se llama *fórmula*; de manera que fórmula *es una espresion analítica en que está cifrado el modo de ejecutar una operacion, ó alguna propiedad de una cantidad.*

Si la segunda parte del binomio tuviera el signo negativo —, resultaria

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$,

y solo habria que enmendar en la regla, el decir *ménos el duplo de primera por segunda*; de modo que reuniendo los dos resultados, será

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

158 Esto supuesto, la fórmula

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

sirve para elevar al cuadrado cualquier polimonio tal como $a+b+c+d$; donde observaré que tomando por primera parte la a, y lo demas por segunda, el cuadrado se compondrá de las tres partes que acabamos de decir. El formar el cuadrado de a y tomar el duplo de a ó $2a$ por lo que sigue, nada tiene que hacer; despues, para formar el cuadrado de la segunda $b+c+d$, se tomará b por primera parte y lo demas por segunda &c. &c., y continuando la misma observacion, estableceremos la siguiente regla para elevar al cuadrado un polinomio: *cuádrese el primer término; multiplíquese el duplo del primer término por todos los que le siguen; cuádrese despues el segundo; multiplíquese su duplo por todos los que le siguen; cuádrese el tercero, y continúese lo mismo hasta cuadrar el último término.* Así, aplicándola al polinomio dicho tendré $(a+b+c+d)^2=$

$a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$ (B).

159 Los cuadrados de los números díjitos están en la tabla de multiplicar, pues $1^2=1\times1=1$;
$2^2=2\times2=4$; $3^2=3\times3=9$; $4^2=4\times4=16$;
$5^2=5\times5=25$; $6^2=6\times6=36$; $7^2=7\times7=49$;
$8^2=8\times8=64$; $9^2=9\times9=81$.

Estos es necesario saberlos de memoria, para encontrar sus raices y las de los números intermedios; de modo que los principiantes se deben familiarizar mucho con este lenguaje: *la raiz de 25 es 5 y no sobra nada; la raiz de 38 es 6 y sobran 2; &c.*

Ahora, si el número es compuesto, se descompondrá siempre en decenas y unidades; así, si quiero elevar 38 al cuadrado, le descompondré en dichas partes, y será $38=30+8$;
y suponiendo $30=a$ y $8=b$, tendré por medio de la fórmula (A), que $38^2=(30+8)^2=30^2+2\times30\times8+8^2=$ $900+480+64=1444$;
donde advierto que el cuadrado de todo número que se compone de decenas y unidades, consta de tres partes: *de cuadrado de decenas, de duplo de decenas por unidades, y de cuadrado de unidades.*

160 Formemos ahora los cuadrados siguientes.

$$\left.\begin{array}{l}1^2=1\\9^2=81\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}10^2=100\\99^2=9801\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}100^2=10000\\999^2=998001\end{array}\right\}\&c.$$

Y observando las cifras que tienen los números y sus cuadrados, veo que el menor número 1 de una cifra tiene una en su cuadrado, y el mayor 9 tiene dos; el menor número 10 de dos cifras tiene tres en su cuadrado 100, y el mayor 99 tiene cuatro; y en general *todo número de* n *cifras tiene en su cuadrado lo mas el duplo* ó $2n$, *y lo ménos el duplo ménos una* ó $2n-1$.

161 Recíprocamente, todo número de una ó dos cifras tiene su raiz espresada por una; todo número de tres á cuatro cifras tiene dos en su raiz; y en general *todo número de un número par* $2n$ *de cifras tiene en su raiz la mitad* n; *y todo número de un número impar* $2n-1$ *de cifras, tiene en su raiz la mitad y* $\frac{1}{2}$ *mas, esto es,* $\frac{1}{2}(2n-1)+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=n$.

162 Aplicando la fórmula (B) al número 678, será $a=600$, $b=70$, $c=8$, y $d=0$, y
$678^2=(600+70+8)^2=600^2+2\times600\times70+2\times600\times8+70^2+2\times70\times8+8^2=360000+84000+9600+4900+1120+64=459684$;
donde observo que el cuadrado de las centenas espresa decenas de millar; el duplo de centenas por decenas espresa millares, &c.; luego para proceder del cuadrado á la raiz, hemos de buscar cada parte del cuadrado en el lugar que le corresponde. Así, se establecerá por regla.

Divídase el número propuesto en periodos de á dos guarismos, empezando por la derecha, y no le hace que el último periodo contenga solo un guarismo; á su derecha se colocan las rayas de dividir; se halla la raiz del periodo de la izquierda, y se pone en las rayas; esta raiz se cuadra, y el cuadrado se resta de dicho periodo; al lado de la resta se baja el periodo siguiente, y se separa con una coma el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda de la coma se divide por el duplo de la raiz hallada (que se coloca debajo de lo separado con la coma); *el cociente que resulta se pone en la raiz á la derecha del guarismo anterior, y al lado del duplo de la raiz que sirvió de divisor; se multiplica el divisor junto con el cociente, por el mismo cociente, y el producto se resta de lo que tiene encima, esto es, del residuo anterior, junto con el periodo que se le añadió; al lado de la resta que resulte, se baja el periodo siguiente, y se separa el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda se divide por el duplo de toda la raiz hallada; y así se continúa hasta que no haya mas periodos que bajar; en cuyo caso, si la última resta es cero, el número tiene raiz exacta; y si no, es señal de que no la tiene. Para aproximarla por decimales se añadirán á la resta dos ceros, los que se considerarán como si fuese un periodo; esto es, se separará uno, se dividirá lo que quede á la izquierda por el duplo de toda la raiz hallada, el cociente se pondrá*

en la raiz despues de la coma; y luego se continuará todo lo que se quiera, añadiendo dos ceros por cada guarismo que se intente sacar.

V. g. si quiero estraer la raiz cuadrada de 459684, le dividiré en periodos de á dos guarismos cada uno, y tiraré las rayas como aquí se ve:

4 5,9 6,8 4	6 7 8
3 6	
0 9 9,6	
1 2 7	
1 0 7 8,4	
1 3 4 8	
0 0 0 0	

Luego, veré que la raiz de 45 es 6, que pongo en las rayas, y su cuadrado 36 debajo del 45; tiro una raya y resto, lo que da 9. Al lado de la resta 9, bajo el siguiente periodo 96; separo el guarismo de la derecha con una coma, y lo que queda á la izquierda que es 99, lo divido por 12, duplo de la raiz hallada, que pongo debajo del 99, esto es, debajo de lo separado con la coma; el cociente 7 de dividir 99 por 12, le pongo en la raiz á la derecha del 6, y tambien al lado del 12; multiplico el 127 por el cociente 7, y voy restando el producto de lo que tiene encima, diciendo: 7 por 7 son 49, de 49 á 56 van 7 y llevo 5; 7 por 2 son 14, y 5 que llevaba son 19, de 19 á 19 va cero y llevo 1; 7 por 1 es 7, y 1 que llevaba son 8, de 8 á 9 va 1 que pongo. Al lado de la resta 107, bajo el periodo siguiente 84, separo el guarismo 4, y lo que queda á la izquierda lo divido por el duplo de toda la raiz hallada que es 134; el cociente 8 de dividir 1078 por 134, le pongo en los parajes dichos; y hecha la multiplicacion del 1348 por 8, y restando al mismo tiempo, nos sale 0; de consiguiente la raiz exacta del número propuesto es 678.

Esc. Al dividir lo separado á la izquierda de la coma por el duplo de la raiz hallada, se debe tener presente: *que nunca se puede poner mas de á 9 en la raiz*; y si lo que está á la izquierda es menor que el duplo de la raiz, *se pondrá 0 en ella y se bajará*

el periodo siguiente. Tambien suele ocurrir el que se ponga en la raiz mas de lo que corresponde: lo que se conoce si al ejecutar la multiplicacion y resta, no se puede hacer esta última.

163 Si en la fórmula (A) hacemos $b=1$, se tendrá

$$(a+1)^2=a^2+2a\times 1+1^2=a^2+2a+1;$$

y como el primer término a^2 es el cuadrado de a, resulta que los *cuadrados de dos números* a *y* a+1 *que se diferencian en una unidad, se diferencian en el duplo del menor* a *mas la unidad*, (*esto es, en* 2a+1). Esta proposicion sirve para comprobar las restas que resulten al estraer las raices, pues siempre pueden llegar á ser hasta el duplo de la raiz hallada; pero en llegando á ser el duplo mas uno, deberá tener la raiz una unidad mas de lo que se le haya puesto.

164 Para estraer la raiz cuadrada de 1715037, le dividiré en periodos, y ejecutaré la operacion como aquí se presenta.

Donde advierto que como al sacar el tercer guarismo sale 0, el producto del 260 por cero debe ser cero; y así, la resta será el 250, al lado de la cual bajo el periodo siguiente 37; y como al fin me sale una resta 1556, infiero que el número propuesto no tiene raiz exacta, y diré que su raiz es 1309 y algo mas.

Si quiero aproximarla por decimales, pondré coma en la raiz, añadiré á la resta 1556 dos ceros por cada guarismo decimal que quiera sacar, y considerare ca-

```
1,7 1,5 0,3 7    | 1309,594
0 7,1            |----------
  2 3            |
-----
0 2 5,0
  2 6 0
  -----
  2 5 0 3,7
  2 6 0 9
  ---------
  0 1 5 5 6 0,0
      2 6 1 8 5
      ---------
    0 2 4 6 7 5 0,0
      2 6 1 9 0 9
      -----------
      0 1 1 0 3 1 9 0,0
        2 6 1 9 1 8 4
        -------------
        0 0 5 5 5 1 6 4
```

da dos ceros, como si fuese un periodo, (cuya práctica está fundada en que si la raiz tuviese un guarismo decimal, su cuadrado tendrá dos, uno por cada vez que es factor), y aproximándola hasta milésimas tendré la raiz 1309,594.

Si el número consta de enteros y decimales, ó de decimales solas, *se hará que el número de guarismos decimales sea par, añadiendo un cero si fuese impar.* V. g. si quiero estraer la raiz cuadrada de 0,9, añadiré un cero, y despues de haber puesto el cero y coma en las rayas, como aquí se presenta: veré que la raiz de 90 es 9 que pongo en la raiz, resto su cuadrado 81, y añado á la resta 9 dos ceros; y continúo hasta sacar los guarismos que desee, que supongo que son tres, y tendré que la raiz de 0,9 es 0,948.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}9\,0 & 0{,}948 \\ 9\,0{,}0 & \\ 1\,8\,4 & \\ \hline 1\,6\,4\,0{,}0 & \\ 1\,8\,8\,8 & \\ \hline 1\,2\,9\,6 & \end{array}$$

165 Dejamos dicho (128) cómo se forman las potencias, y (129) cómo se estraen las raices de los quebrados, pero cuando son numéricos, suele ser mas sencillo el convertirlos en decimales, y luego hacer con ellos las operaciones que se quieran. Así, si quiero estraer la raiz de $\frac{5}{7}$, tendré por el primer método

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\frac{2{,}236}{2{,}645}=0{,}845;$$

pero es mas sencillo de este modo

$$\sqrt{\tfrac{5}{7}}=\sqrt{0{,}714285}=0{,}845,$$

como se puede comprobar.

De la formacion de las potencias en general.

166 Hemos dicho (127) lo que se entiende por potencia en general; y hemos dado las reglas para formar las de los monomios. Para formar las de los

binomios, y deducir una regla general, sea $a+b$ el binomio cuyas potencias se quieren formar: que yéndole multiplicando por sí mismo, y reduciendo dará las potencias siguientes.

1.ª $(a+b)^1=a+b$

2.ª $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

3.ª $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

4.ª $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

5.ª $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Donde se observa (5.ª por ejemplo) que la prira parte a del binomio, se halla en todos los términos ménos el último, que su esponente en el primero es el mismo 5 de la potencia, y va menguando una unidad en cada uno hasta no encontrarse en el último; que la segunda parte b del binomio no se halla en el primer término; en el segundo tiene la unidad por esponente, y va aumentándola en cada término hasta que en el último tiene el mismo esponente 5 de la potencia.

Luego en punto á letras y esponentes está conocida la ley que siguen. Veamos los coeficientes: el 5 del segundo término es el esponente de la potencia; el coeficiente 10 del tercero es lo mismo que $\frac{5\times4}{2}$; pero 5 es el coeficiente del segundo término, 4 el esponente que lleva en él la primera parte, y 2 divisor, es lo mismo que el número de términos que hay ántes del tercero que se busca. Esto mismo se verifica en los demas; luego para hallar el coeficiente de un término cualquiera, *se multiplicará el del término anterior por el esponente que en él lleve la primera parte, y el producto se partirá por el número de términos que anteceden al que se busca.*

Si la segunda parte b del binomio fuese negativa, variarian de signo los términos en que se hallase b con esponente ímpar, que son los que ocupan lugares pares en la potencia; por lo que seria — el signo del segundo término, + el del tercero, — el del cuarto, y así alternativamente.

Esc. Todos estos resultados puestos en regla darian á conocer las partes de que se compone cada potencia; y contrayéndolos á números descompuestos en decenas y unidades, darian igualmente á conocer las partes de que se componian sus potencias, y que especie de unidades espresaba cada una de dichas partes, para poder proceder de la potencia á la raiz, y deducir una regla para estraer raices de un grado cualquiera. Pero como desde la raiz cúbica en adelante son muy complicadas las operaciones, y por otra parte hay medios sencillos de ejecutarlo, lo reservamos para otro lugar.

De las ecuaciones determinadas de segundo grado.

167 Queda dicho (143) lo que se entiende por ecuacion de segundo grado, y quedan resueltas (151) las puras. Para resolver las mistas, es necesario manifestar que *toda ecuacion mista de segundo grado ha de constar de tres términos*: uno en que se halle la incógnita elevada al cuadrado, otro en que se halle elevada á la primera potencia, y otro donde no se halle incógnita; de modo que la espresion general de las ecuaciones de segundo grado será

$$ax^2+bx=c, \text{ ó } ax^2+bx-c=0 \text{ (A).}$$

No puede haber mas términos, porque no puede hallarse ninguno con la incógnita elevada á la tercera potencia, ni á ninguna otra superior; si hubiese muchos términos donde se hallase x^2 ó la x, se reducirian todos á uno encerrando en un paréntesis todo lo que las multiplicase; y todos los términos donde no se hallase la x se podrian considerar como uno solo.

Tampoco puede tener ménos términos; porque si faltase el ax^2 no seria de segundo grado; si faltase el bx no seria mista; y si faltase el término constante c, quedaria reducida á $ax^2+bx=0$, que dividiendo por x se convertirá en $ax+b=0$, que es de primer grado.

Ahora, dividiendo por a, la ecuacion (A) se con-

vertirá en $x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0$;

y haciendo $\frac{b}{a}=p$, y $-\frac{c}{a}=q$, será $x^2+px+q=0$ (B),

que será la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado; y cuando la ecuacion está bajo esta forma, se dice que está *preparada*. Para esto se requiere que se haya reducido la ecuacion á solos tres términos; que se halle sin coeficiente el primer término, que es donde la incógnita está elevada al cuadrado, (lo que se consigue dividiendo toda la ecuacion por el coeficiente que tenga dicho término); y que ademas dicho primer término tenga el signo positivo, lo que se conseguirá mudando los signos á toda la ecuacion (147 cor.) en caso de no tenerle.

168 Puesto que como acabamos de ver

$$x^2+px+q=0 \text{ ó } x^2+px=-q,$$

es la forma general de las ecuaciones de 2.° grado, en resolviendo esta, se tendrá la regla para las demas.

Para esto advertimos que esta ecuacion quedaria resuelta, si el primer miembro fuese un cuadrado exacto, porque estrayendo la raiz cuadrada, tendriamos la x elevada solo á la primera potencia; pero comparando el primer miembro con la espresion $x^2+2ax+a^2$ del cuadrado de $x+a$, vemos que le falta el tercer término del cuadrado; luego considerando á x como primera parte, x^2 será su cuadrado, px el duplo de primera por segunda; y como x es la primera, p será el duplo de la segunda, y por lo mismo su mitad $\frac{1}{2}p$ será igual á dicha segunda parte; luego si á ambos miembros añadimos $\frac{1}{4}p^2$, que es el cuadrado de dicha mitad, la ecuacion no se alterará, y el primer miembro será cuadrado perfecto; luego se tendrá

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q;$$

que, estrayendo la raiz cuadrada, da

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}, \text{ y } x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} \text{ (C).}$$

Este resultado comparado con la ecuacion (B)(167) da la siguiente regla.

Para resolver una ecuacion de 2.º grado que ya está preparada, *póngase desde luego la incógnita; luego el signo $=$; despues de este signo la mitad del coeficiente del segundo término con un signo contrario al que lleve; despues el signo de ambigüedad* $\pm$; *luego un radical de segundo grado; debajo de este radical, el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, siempre con el signo positivo; y despues el tercer término de la ecuacion con el mismo signo que tenga en el segundo miembro, ó con un signo opuesto al que tenga en el primero.*

Sacando los dos valores que da el signo $\pm$ de la ecuacion (C) se tiene

$$x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q},\text{ y } x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

Estos dos valores no pueden ser iguales, á menos que p no sea cero; porque entónces el primero será

$$x=\sqrt{-q},\text{ y el segundo } x=-\sqrt{-q},$$

que sólo se diferencian en el signo. Pero cuando $p=0$, la ecuacion (B) es pura; luego para que los dos valores que da una ecuacion de segundo grado sean iguales, aunque de signo contrario, es preciso que dicha ecuacion sea pura, ó que el coeficiente del segundo término sea cero.

Esc. Toda ecuacion de segundo grado da dos valores para la incógnita, ó ha de ser imaginaria; por analogía se deduce, que si fuera de tercer grado tendria tres valores &c. y en general *toda ecuacion, y por consiguiente todo radical, de un grado cualquiera, da para la incógnita tantos valores como unidades tiene el esponente que da nombre á la ecuacion ó al radical.*

169 Propongámonos resolver algunas cuestiones.

1.ª *Dos correos* A *y* B, *salen al mismo tiempo al encuentro uno de otro, de dos ciudades distantes entre sí* 320 *leguas;* A *anda cada dia* 8 *leguas mas que*

B, y el número de dias que tardan en encontrarse es la mitad de las leguas que anda B al dia ¿cuántos dias tardarán en encontrarse?

Res. y *Dem.* Sea x el número de dias que se piden; con lo cual $2x$ serán las leguas que B anda al dia; y el total de leguas que habrá andado B hasta encontrar á A, será $2x \times x = 2x^2$.

Siendo $2x$ lo que anda B, A que anda 8 leguas mas, andará $2x+8$, y el total hasta encontrarse será el producto de lo que anda en un dia, que es $2x+8$, por los dias que está caminando que son x, esto es $(2x+8)x = 2x^2+8x$.

Y como lo que anduvieron los dos es toda la distancia de las dos ciudades, se tendrá planteado el problema en esta ecuacion

$$2x^2+8x+2x^2=320\text{, ó } 4x^2+8x=320;$$

y dividiendo por 4 será $x^2+2x=80$,

que da $x=-1 \pm \sqrt{1+80} = -1 \pm \sqrt{81} = -1 \pm 9$;

de donde sale $x=-1+9=8$, ó $x=-1-9=-10$, por consiguiente se encontraron al cabo de ocho dias; B andaba 16 leguas diarias, y A andaba 24; el total de A hasta encontrarse, será $24 \times 8 = 192$, y el de B será $16 \times 8 = 128$, que entre las dos componen las 320. El valor $x=-10$ satisface á la ecuacion $4x^2+8x=320$, pues la convierte en

$$4 \times (-10)^2 + 8 \times -10 = 4 \times 100 - 80 = 320;$$

más no al sentido en que viene propuesta la cuestion.

2.ª *Dividir el número 14 en dos partes cuyo producto sea 54.*

Res. y *Dem.* Sea x la mayor, con lo que la menor será $14-x$; y la cuestion quedará planteada en esta ecuacion $x(14-x)=54$ ó $14x-x^2=54$ ó

$x^2-14x=-54$, que da $x=7 \pm \sqrt{49-54} = 7 \pm \sqrt{-5}$.

170 Este resultado imaginario manifiesta que la cuestion es imposible; y como generalmente al enunciar un problema, o al proponerse uno una investigacion cualquiera, no se conocen todas las relaciones

de los datos con el resultado, la imposibilidad de este manifiesta que la proposicion enunciada está en contradicion con alguna verdad demostrada; y hé aquí la utilidad de las imaginarias.

En efecto, en el problema propuesto, se pide que el producto de las dos partes del número 14 sea 54, que es mayor que el cuadrado 49 de la mitad de 14; pero *el producto máximo de un número descompuesto en dos partes, es el cuadrado de su mitad*; luego pedir un producto mayor, es pedir un imposible.

Para demostrarlo, sea $2a$ la cantidad que se ha de descomponer en dos partes, con la condicion de que su producto sea el máximo posible; si llamamos $2x$ la diferencia de dichas dos partes, estas (154) serán $a+x$ y $a-x$, y su producto $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$, el cual nunca será mayor que cuando $x=0$; pues entónces no habrá que restar nada del cuadrado a^2; pero si x es 0, cada parte de la cantidad $2a$ se convierte en a que es su mitad; luego resulta la proposicion.

De las razones y proporciones.

171 Se llama *razon* la comparacion de dos cantidades; la cantidad que se compara se llama *antecedente*; aquella con que se compara, *consecuente*; los dos juntos se llaman *términos de la razon*; y lo que resulta se llama *esponente de la razon* ó simplemente *razon*. Si el antecedente es igual al consecuente, se llama *razon de igualdad*; si el antecedente es mayor que el consecuente; se llama *de mayor desigualdad*; y si menor, *de menor desigualdad*.

Con dos miras diferentes se pueden comparar dos cantidades: ó para averiguar la diferencia que hay entre ellas, que se llama *razon aritmética*, ó para averiguar las veces que la una contiene á la otra, que se llama *razon geométrica*.

La razon aritmética se señala poniendo el antecedente, despues un punto, y luego el consecuente;

la geométrica poniendo dos puntos entre el antecedente y el consecuente. V. g. la razon aritmética entre 7 y 3, se escribe 7.3, y se lee: 7 *es aritméticamente á* 3; la razon geométrica entre 12 y 4 se señala 12:4, y se lee 12 *es geométricamente á* 4; ó por ser estas razones las que ocurren con mas frecuencia, se leen omitiendo la palabra *geométricamente* de este modo; 12 *es á* 4.

Para hallar la razon aritmética *se resta el consecuente del antecedente*; v. g. la de 7 á 3 será $7-3=4$. Para hallar la geométrica *se divide el antecedente por el consecuente*; v. g. la de 12 á 4 será 12 : 4 ó $\frac{12}{4}=3$. Donde observamos que aunque con distinto lenguaje, volvemos á las operaciones de restar y dividir; y que el punto puesto entre los términos de la razon aritmética equivale al signo — de la operacion de restar.

Cor. De esto y de lo dicho (61, 2.° y 4.°) se sigue que *á una razon aritmética le sucede lo mismo que al antecedente*, *y lo contrario que al consecuente*; y por lo mismo *si se tienen dos razones con un mismo antecedente*, *aquella será mayor que tenga menor consecuente*, *y viceversa*; *y si tienen un mismo consecuente*, *aquella será mayor ó menor*, *que tenga mayor ó menor antecedente*; *y una razon aritmética no se altera aunque á sus dos términos se les añada ó quite una misma cantidad. A la geométrica le sucede lo mismo*; *y no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad.*

172 Cuando de dos razones de una misma especie, la una tiene por antecedente lo que la otra por consecuente, se dice que la una es *inversa* de la otra; así, 3.7 es inversa de la 7.3; y en efecto se tiene $3-7=-4$, que es lo contrario de $7-3=4$. Tambien 4.12 es razon geométrica inversa de la 12:4; pues $4:12=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, es lo contrario de $12:4=\frac{12}{4}=3=\frac{3}{1}$.

173. *Proporcion* es la igualdad de dos razones de una misma especie; así, proporcion aritmética es *la igualdad de dos razones aritméticas*; y proporcion,

geométrica *la igualdad de dos razones geométricas.*

Para escribir una proporcion aritmética se pone una razon á continuacion de otra, separándolas con dos puntos; y para escribir una geométrica se ponen cuatro puntos entre las dos razones. Para leerlas se lee cada razon separadamente, y cuando se llega á los dos puntos en la aritmética, ó á los cuatro en la geométrica, se lee *como*. En toda proporcion entran cuatro términos, de los cuales el primero y tercero se llaman *antecedentes*, y el segundo y cuarto *consecuentes*; el primero y cuarto *estremos*, y el segundo y tercero *medios*.

174 Para escribir proporciones aritméticas con facilidad, *se pondrán dos cantidades cualesquiera, separadas entre sí con un punto, para que formen la primera razon; despues se pondrán dos puntos, y luego á las dos cantidades primitivas se les añadirá* (ó quitará) *una misma cantidad; y se pondrán estos dos números despues de los dos puntos, separados entre sí con un punto, los cuales formarán la segunda razon;* pues en este caso las dos razones son iguales (171 cor.).

Para formar una proporcion geométrica, *se escribirán dos cantidades cualesquiera, separadas con dos puntos, para que formen la primera razon; luego, se pondrán los cuatro puntos, y despues por segunda razon lo que resulte de multiplicar* (ó dividir) *por una misma cantidad los dos términos de la primera*; porque en este caso tambien serán iguales las dos razones (171 cor.).

Así, si quiero escribir una proporcion aritmética, pondré dos cantidades cualesquiera 7 y 5, separadas con un punto; luego, pondré los dos puntos, y añadiré á las anteriores una misma cantidad, v. g. 6, y tendré 7.5:13.11, que leeria diciendo: 7 *es aritméticamente á* 5 *como* 13 *á* 11.

Si quiero escribir una proporcion geométrica, escribiré dos cantidades cualesquiera v. g. 8 y 5, para que formen la primera razon; despues de puestos los cuatro puntos multiplicaré ambas cantidades

por otra cualquiera, tal como 3, y tendré la proporcion 8:5::24:15, que leeré diciendo: 8 *es á* 5 *como* 24 *á* 15.

175 Cuando los medios de una proporcion son diferentes, como en las anteriores, las proporciones se llaman *discretas*; y cuando son iguales los medios, la proporcion se llama *continua*. Así, para formar una proporcion continua aritmética, *se pondrá por tercer término el segundo, y para poner el cuarto se añadirá al tercero lo que el segundo llevaba al primero* (ó se le quitará lo que el primero llevaba al segundo), v. g. para escribir una proporcion aritmética continua, pondré por primera razon cualquiera 5.9; despues del 9 pondré los dos puntos, luego el mismo 9, y despues de un punto, lo que resulta de añadir 4 al 9, y tendré la proporcion 5.9:9.13.

La proporcion aritmética continua se escribe de un modo abreviado, poniendo ántes este signo ÷, despues el primer término, luego el medio, y despues el otro estremo separándolos con un punto; de manera que la anterior se escribe ÷5.9.13.

Donde el signo ÷ puesto ántes, da á conocer que se ha de repetir el segundo término, y se lee: 5 *es aritméticamente á* 9 *es á* 13.

Para formar una proporcion geométrica continua, *se escribirá un número cualquiera, despues se pondrá por segundo término y por tercero un múltiplo cualquiera de este número; y luego para el cuarto se toma el mismo múltiplo del múltiplo anterior*. V. g. pondré primero un número cualquiera 5, despues un múltiplo cualquiera de este, tal como 15, y este será el que represente los medios; para hallar el otro estremo, tomaré el mismo múltiplo de 15, esto es, el triplo y tendré 5:15::15:45 ó ∺5:15:45.

Donde el signo ∺ puesto ántes, indica que se ha de repetir el 2.° término, y se lee: 5 *es á* 15 *es á* 45.

176 *En toda proporcion aritmética discreta la suma de los estremos es igual á la de los medios; y al duplo del término medio en la continua.*

Espl. Sean las proporciones $10.7:17.14$, $\div 8.11.14$. digo que en la primera será $10+14=7+17$, y en la segunda $8+14=2\times 11$.

Dem. 1.° Como proporcion es igualdad de razones, la primera dará $10-7=17-14$; y trasladando (147 cor.) las cantidades negativas al miembro opuesto del en que se hallan, será $10+14=17+7$, que era L. 1.° Q. D. D.

2.° La segunda proporcion puesta con estension, será $8.11:11.14$; que da $8-11=11-14$; y trasladando como ántes, será $8+14=11+11=2\times 11$, que era L. 2.° Q. D. D.

Esc. Sean en general las dos proporciones $a.b:c.d$ y $\div a.b.c$; y discurriendo del mismo modo que ántes, dará la primera $a-b=c-d$, y trasladando (147 cor.) será $a+d=c+b$ (A).

La segunda nos dará $a-b=b-c$, y trasladando será $a+c=b+b=2b$ (B), que manifiestan la proposicion con toda generalidad.

177 Si en la ecuacion (A) $a+d=b+c$, despejamos la d, se tendrá $d=b+c-a$; que quiere decir, que *dados los tres primeros términos* a, b, c, *de una proporcion, se hallará el cuarto* d *sumando el segundo con el tercero, y restando el primero.* Así, dados los tres términos 9, 25 y 32, para hallar el cuarto, que llamaré x, haré $x=25+32-9=48$, cuya operacion y proporcion se practican de este modo:

$$9.25:32.x=25+32-9=48.$$

Esc. Despejando las demas letras se tendrá

$$a=b+c-d,\quad b=a+d-c,\quad c=a+d-b,$$

y cada una dará una regla para hallar el primero, el segundo, el tercero términos, cuando se necesiten.

178 Si en la ecuacion (B) $a+c=2b$, despejamos la c, dará $c=2b-a$; que quiere decir, que *cuando se quiera hallar un tercer término continuo proporcional aritmético á dos cantidades dadas, del duplo de la segunda se restará la primera.* Así, si quiero hallar un tercero proporcional á 26 y 34, espresándo-

le por x, será $x=2\times34-26=42$, que se ejecuta como aquí se ve: $\div 26.34.x=2\times34-26=42$.

Si en la misma ecuacion despejamos la b, dará $b=\frac{1}{2}(a+c)$, que quiere decir, que *si dadas dos cantidades se quiere hallar una media proporcional aritmética, de la suma de dichas cantidades se tomará la mitad.* Así, si quiero hallar un medio proporcional entre 27 y 39, llamándole x, se tendrá $x=\frac{1}{2}(27+39)=33$; y la proporcion será $\div 27.33.39$.

179 *En toda proporcion geométrica discreta el producto de los estremos es igual al de los medios; y al cuadrado del término medio en la continua.*

Espl. Sean las proporciones

$8:3::24:9$, $\div\div 6:18:54$;

voy á demostrar que $8\times9=3\times24$, y que $6\times54=18^2$; ó en general, si $a:b::c:d$, y $\div\div a:b:c$, será $ad=bc$, y $ac=b^2$.

Dem. Como proporcion es igualdad de razones, la primera dará $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

y trasladando los divisores (150 cor.), será $ad=bc$ (A), que era L. 1.° Q. D. D.

2.° La segunda proporcion, puesta con estension, será $a:b::b:c$, que da $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,

y quitando los divisores, será $ac=bb=b^2$ (B).

180 Recíprocamente, *si cuatro cantidades son tales que el producto de dos de ellas sea igual al producto de las otras dos, con dichas cantidades se podrán formar ocho proporciones diferentes, poniendo por estremos las dos que formen un producto, y por medios las dos que formen el otro producto.*

Espl. Sean a, b, c, d, tales cantidades que $ad=bc$; voy á demostrar que se pueden sacar las ocho proporciones siguientes (A).

Dem. Si en la ecuacion $ad=bc$, trasladamos (150 cor.) la d y la b al otro miembro, se tendrá $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que puesta en proporcion dará $a:b::c:d$ (1.ª).

(A)
$a:b::c:d$ (1.ª)
$a:c::b:d$ (2.ª)
$d:b::c:a$ (3.ª)
$d:c::b:a$ (4.ª)
$c:d::a:b$ (5.ª)
$c:a::d:b$ (6.ª)
$b:a::d:c$ (7.ª)
$b:d::a:c$ (8.ª)

Si en la misma ecuacion trasladamos la d y la c, será $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, que da $a:c::b:d$ (2.ª).

Si trasladamos la a y la b, resultará $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, que da $d:b::c:a$ (3.ª)

Si trasladamos la a y la c, será $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$, que da $d:c::b:a$ (4.ª).

Como es lo mismo $ad=bc$ que $bc=ad$, trasladando en esta la b y la d, será $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ que da $c:d::a:b$ (5.ª).

Trasladando la b y la a, será $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, que da $c:a::d:b$ (6.ª).

Trasladando la c y la a, será $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ que da $b:a::d:c$ (7.ª).

Y trasladando la c y la d, será $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ que da $b:d::a:c$ (8.ª), que era L. Q. D. D.

Esc. Si se quisiesen sacar mas proporciones, saldria alguna de las anteriores; de donde se sigue que *dada una ecuacion se pueden sacar ocho proporciones; ó dada una proporcion se le pueden dar ocho formas diferentes.*

181 Si en la ecuacion (A § 179) $ad=bc$, despejamos la d, se tendrá $d=\frac{bc}{a}$;

que quiere decir, que *dadas tres cantidades, se hallará una cuarta proporcional geométrica, multiplicando la segunda por la tercera, y partiendo el producto por la primera.* Así, si quiero hallar un cuarto proporcional á los números 9, 14 y 27, llamándole x tendré $x=\frac{14\times 27}{9}=42$; cuya operacion se dispone

como aquí se ve: $9:14::27:x=\frac{14\times 27}{9}=\frac{378}{9}=42.$

Esc. Despejando los términos a, b, c, se tendrá

$a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $=c\frac{ad}{b}$;

y cada una dará la regla para hallar el primero, el segundo, ó el tercer término, cuando se necesiten.

182 Si en la ecuacion (B § 179) $ac=b^2$, despejamos la c, dará $c=\frac{b^2}{a}$;

que quiere decir, que *para hallar un tercer término continuo proporcional geométrico á dos cantidades dadas, el cuadrado de la segunda se partirá por la primera.* Así, si quiero hallar un tercero proporcional á 16 y 24, llamándole x será $x=\frac{24^2}{16}=\frac{576}{16}=36$,

que se practica como aquí se ve:

$$\div\div 16:24:x=\frac{24^2}{16}=\frac{576}{16}=36.$$

Si en la misma ecuacion despejamos la b, será $b=\sqrt{ac}$;

que quiere decir, que *si dadas dos cantidades se quiere hallar una media proporcional geométrica, del producto de dichas cantidades se estraerá la raiz cuadrada*. Así, si quiero hallar un medio proporcional entre 8 y 18, llamándole x, será

$$x = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12;$$

y la proporcion será $\div 8:12:18$.

Esc. Es digna de notarse la analogía que hay entre las propiedades de las proporciones aritméticas y geometricas; pues las de aquella se convierten en las de esta, sustituyendo *multiplicar* á la voz *sumar*; *dividir* á la *restar*; *cuadrar* á *tomar el duplo*, y *estraer la raiz cuadrada* á *tomar la mitad*.

De las transformaciones que se pueden dar á una proporcion, sin que deje de subsistir proporcion.

183 Hemos visto (180) que á la proporcion

$a:b::c:d$,

se la pueden dar ocho formas diferentes, y que siempre hay proporcion. Estas y otras varias que vamos á esponer, se llaman *alternar*, *invertir*, *componer*, *dividir*, *permutar* y *convertir*.

Alternar es *comparar antecedente con antecedente, y consecuente con consecuente*, cuya operacion queda hecha *mudando de lugar los medios ó los estremos*. Así, la segunda y tercera (180) están alternadas respecto de la primera.

Invertir es *comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones*; cuya operacion queda hecha *poniendo los medios en lugar de los estremos, y los estremos en lugar de los medios*. Así, la (7.ª) está invertida respecto de la primera.

Ahora, si se continúa alternando é invirtiendo la primera, se llegarán á tener las ocho que hemos dicho.

Toda proporcion se puede *componer*, que es *comparar la suma de antecedente y consecuente con uno*

de los dos, en cada una de las razones, esto es, ó con el antecedente ó con el consecuente.

Sea la proporcion $a:b::c:d$,
digo que $a+b:b::c+d:d$ y $a+b:a::c+d:c$.

Dem. La proporcion $a:b::c:d$ da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

añadiendo 1 á ambos miembros, será $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$;

reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, se tendrá $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

que poniendo en proporcion da $a+b:b::c+d:d$ (A), que era L. 1.° Q. D. D.

Invirtiendo la proporcion dada se tendrá $b:a::d:c$,

que da $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; añadiendo 1 tendrémos $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$;

reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, da $\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$, ó $b+a:a::d+c:c$ (B), que era L. 2.° Q. D. D.

Toda proporcion se puede *dividir*, que es *comparar la diferencia de antecedemte y consecuente con uno de los dos, en cada una de las razones*; esto es, ó bien con el antecedente ó bien con el consecuente.

Sea la proporcion $a:b::c:d$; digo que $a-b:b::c-d:d$, y que $a-b:a::c-d:c$.

Dem. La proporcion $a:b::c:d$, da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

quitando 1 de ámbos miembros, será $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$;

reduciendo el entero á la especie del quebrado que le

acompaña, dará $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

ó formando proporcion $a-b:b::c-d:d$ (C), que era L. 1.° Q. D. L.

Invirtiendo la dada, se tendrá $b:a::d:c$,

que da $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$;

quitando ámbos miembros de la unidad, ó restando esta ecuacion de la $1=1$, resultará

$$1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c} \text{ ó } \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

ó poniendo en proporcion $a-b:a::c-d:c$ (D), que era L. 2.° Q. D. D.

Permutar es *mudar de lugar las razones, ó poner la segunda razon por primera, y la primera por segunda.* Así, la quinta está permutada respecto de la primera (§ 180).

Convertir es *invertir una proporcion compuesta ó dividida*; cuando se invierte una compuesta, se llama *convertir componiendo*: y cuando una dividida, *convertir dividiendo*.

Así, invirtiendo la (A) y (B) tendrémos $b:a+b::d:c+d$ (E) y $a:a+b::c:c+d$ (F), que respecto á la primitiva están convertidas componiendo; é invirtiendo las (C) y (D) se tendrá $b:a-b::d:c-d$ (G) y $a:a-b::c:c-d$ (H), que respecto de la primitiva están convertidas dividiendo.

184 Ahora vamos à demostrar algunas propiedades de las proporciones.

1.ª *Si los antecedentes de una proporcion son iguales, tambien lo serán los consecuentes; y recíprocamente.*

Dem. La proporcion $a:b::c:d$, da $ad=bc$; si se supone $a=c$, se podrán suprimir, y quedará $d=b$; y suponiendo $d=b$, quedaria $a=c$, que es L. Q. D. D.

2.ª *Si dos proporciones tienen una razon comun,*

con las otras dos razones se podrá formar proporcion.

Espl. Sean las dos proporciones $a:b::c:d$, y $a:b::m:n$, que tienen comun la razon $a:b$; digo que se tendrá $c:d::m:n$.

Dem. Igualando las razones en cada proporcion,

se tendrá $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$;

y como $\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n}$ son ambas iguales á $\frac{a}{b}$,

serán (intr. ax. 5.º) iguales entre sí, esto es, $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$;

que formando proporcion, tendrémos $c:d::m:n$, que es L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *si dos proporciones tienen unos mismos antecedentes ó unos mismos consecuentes, se podrá formar proporcion con los consecuentes ó antecedentes*; porque alternadas tendrian una razon comun.

3.ª *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Espl. Sea la proporcion $a:b::c:d$; voy á demostrar que $a+c:b+d::a:b$ ó $a+c:b+d::c:d$.

Dem. Alternando la dada será $a:c::b:d$; y componiéndola dará $a+c:c::b+d:d$ ó $a+c:a::b+d:b$, que alternadas serán $a+c:b+d::c:d$ (I), y $a+c:b+d::a:b$ (K), que es L. Q. D. D.

4.ª *En toda proporcion geométrica la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Espl. Sea la proporcion $a:b::c:d$; voy á demostrar que $a-c:b-d::c:d$, ó $a-c:b-d::a:b$.

Dem. Alternando la dada será $a:c::b:d$; y dividiéndola, se tendrá $a-c:c::b-d:d$, ó $a-c:a::b-d:b$; que alternadas dan $a-c:b-d::c:d$ (L), y $a-c:b-d::a:b$ (M), que es L. Q. D. D.

5.ª *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.*

Dem. Si de las proporciones (I) y (L), que tienen comun la razon $c:d$ sacamos la $a+c:b+d::a-c:b-d$ (N), tendrémos L. Q. D. D.

6.ª *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á su diferencia.*

Dem. Porque si alternamos la proporcion anterior tendrémos $a+c:a-c::b+d:b-d$ (O), que espresa L. Q. D. D.

Esc. Comparando la proporcion (O) con la primitiva alternada, que es $a:c::b:d$, nos dice, que *la suma de los dos primeros términos de una proporcion es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á la suya*; á cuyo modo de comparar le llama Leslie, *mixing*, esto es, *comparar mezclando.*

Cor. De todo esto resulta que dando la primitiva ocho formas, la (A) otras ocho, la (B) otras ocho, la (C) otras ocho, la (D) otras ocho, la (I) otras ocho, la (K) otras ocho, la (L) otras ocho, la (M) otras ocho, y la (N) otras ocho; se sigue que alternando é invirtiendo la primitiva, y las que resultan de ella, se pueden sacar ochenta proporciones de una dada.

185 Es tan importante la regla dada (174), que por su medio no sólo se pueden formar inmediatamente proporciones, sinó que dada una razon, se pueden poner otra multitud iguales con ella, multiplicando sus dos términos por 2, por 3 &c. Así, dada la razon 2:3, obtendrémos

$$2:3::4:6::6:9::8:12::10:15::12:18::14:21:: \&c.$$

que es lo que se llama *serie de razones iguales*, y se suelen escribir abreviadamente de este modo:

$$2:4:6:8:10:12:14: \&c.::3:6:9:12:15:18:21: \&c.$$

Cuando se quiere sacar una proporcion, se tomarán dos términos cualesquiera ántes de los cuatro puntos, y otros dos cualesquiera equidistan-

tes despues. Sus propiedades son las siguientes.

1.ª *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la de todos los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Dem. Sea esta la serie de razones iguales
$a:b::c:d::m:n::$&c.:&c;
y tomando las dos primeras tendrémos $a:b::c:d$;
que (184, 3.ª) nos dará $a+c:b+d::c:d$,
ó poniendo en vez de la razon $c:d$ su igual $m:n$ por el supuesto, será $a+c:b+d::m:n$;
que por la misma propiedad da
$a+c+m:b+d+n::m:n$ (a), que es L. Q. D. D.

Esc. Si hubiese mas razones iguales, en vez de la última $m:n$, se sustituiria otra, y se continuaria del mismo modo hasta que no hubiese mas.

2.ª *En toda serie de razones iguales la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Dem. Supongamos la misma serie $a:b::c:d::m:n::$&c.
y tomando las dos primeras será $a:b::c:d$;
la cual (184, 4.ª) nos dará $a-c:b-d::c:d$; ó poniendo en vez de $c:d$ su igual $m:n$, será $a-c:b-d::m:n$;
que en virtud de la misma propiedad nos da
$a-c-m:b-d-n::m:n$ (b), que es L. Q. D. D.

3.ª *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.*

Dem. Como las dos proporciones (a), (b), tienen comun la razon $m:n$, con las otras dos formarémos proporcion (184, 2.ª), y tendrémos
$a+c+m:b+d+n::a-c-m:b-d-n$ (c). L. Q. D. D.

4.ª *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á la suya.*

Dem. Porque si alternamos la proporcion anterior, tendrémos $a+c+m:a-c-m::b+d+n:b-d-n$ (d), que espresa L. Q. D. D.

5.ª *En toda serie de razones iguales la relacion que tenga un antecedente con la suma de los otros, esa*

misma tendrá el consecuente correspondiente con la suma de los demas.

Dem. Sea la serie de razones iguales

$$a:b::c:d::m:n::p:q::\&c.:\&c.$$

Si consideramos que empieza desde la segunda razon, tendrémos (1.ª) $c+m+p+\&c.:d+n+q+\&c.::c:d$; pero si en vez de $c:d$ ponemos su igual $a:b$, resultará

$$c+m+p+\&c.:d+n+q+\&c.::a:b;$$

la cual permutada y alternada se convierte en

$$a:c+m+p+\&c.::b:d+n+q+\&c. \text{ (e)},$$

que espresa L. Q. D. D.

Cor. De aquí resulta que *si el primer antecedente es igual con la suma de los demas, el primer consecuente tambien será igual con la suma de los demas consecuentes*; porque si en la última proporcion suponemos $a=c+m+p+\&c.$ la primera razon será de igualdad, y debiéndolo ser la segunda, será

$$b=d+n+q+\&c.$$

186 Se llama *razon compuesta* la que resulta de multiplicar ordenadamente (esto es antecedente por antecedente, y consecuente por consecuente) dos ó mas razones. Así, si las dos razones $3:5$ y $4:7$ las multiplicamos ordenadamente, tendrémos $12:35$, que será la razon compuesta de aquellas dos; las tres razones $4:5$; $6:11$; $9:13$, dan la compuesta

$$4\times6\times9:5\times11\times13 \text{ ó } 216:715; \text{ \&c.}$$

Si la razon compuesta resulta de dos razones iguales, se llama *duplicada* ó *cuadrada*; así, si se tienen las dos razones iguales $6:8$ y $3:4$, la $6\times3:8\times4$ ó $18:32$, será duplicada ó cuadrada de la $6:8$ ó $3:4$.

Si se multiplican tres razones iguales, v. g. $3:5$; $6:10$ y $9:15$, la compuesta $3\times6\times9:5\times10\times15$ ó $162:750$, se llama *triplicada* ó *cúbica*; y así sucesivamente *cuadruplicada* &c.

Haciendo la multiplicacion como hemos dicho, se sigue que formar razones compuestas es lo mismo que multiplicar quebrados; pues toda razon es un quebrado cuyo numerador es el antecedente y el denominador el consecuente. Así, cuando las razones

son iguales, equivale á formar potencias de los mismos quebrados; y hé aquí la razon porque se llaman *cuadradas* ó *duplicadas*, *cúbicas* ó *triplicadas* &c. De que se sigue, que no es lo mismo razon *dupla* que *duplicada*; una razon es dupla de otra, cuando su esponente es duplo del de ella, duplicada cuando es su cuadrado, &c. &c.

187 Es muy importante el simplificar las razones y proporciones, para poder ejecutar con espedicion los cálculos de sus continuas aplicaciones. Así, en cuanto se dé una razon se verá si se puede simplificar, dividiendo sus dos términos por 2, por 3 &c. lo que no la altera (171 cor.); por lo que en vez de la razon $6:12$ se podrá poner $3:6$ ó $1:2$; en vez de $12:18$ se pondria $6:9$ ó $2:3$ &c.

188 Si la primera razon de una proporcion no se puede simplificar, ó se ha simplificado ya, se verá si se pueden dividir los dos antecedentes por un mismo número, lo que tampoco alterará la proporcion; pues si se alternase, se podria ya simplificar la primera razon. Así, si tengo la proporcion (A pág. sigte.) cuyo cuarto término x quiero buscar, simplificaré la primera razon por 4, y tendré la 2.ª que allí se ve; ahora dividiré por 3 los antecedentes, y tendré la tercera; que da para el cuarto término $x=24$, que es lo mismo que

(A)
$12:8::36:x$
$3:2::36:x$
$1:2::12:x=24$

$$x=\frac{8\times36}{12}=\frac{288}{12}=24,$$

pero mucho mas sencillo.

189 Al formar razones compuestas, puede ocurrir el que no pudiéndose simplificar las simples, se puedan simplificar las compuestas; porque algunos factores de los antecedentes de las unas lo sean tambien de los consecuentes de las otras, y al contrario.

En este caso, en lugar de simplificar la compuesta despues de formada, se indica la operacion resolviendo en factores simples los términos de las componen-

tes, y suprimiendo los que sean comunes. Así, si tengo las razones 3:5; 4:9; 10:21, que dan la compuesta 120:945, ó simplificando 40:315 ú 8:63; formaré la compuesta de este modo:

$$3\times2\times2\times2\times5:5\times3\times3\times3\times7,$$

que suprimiendo los factores comunes 3 y 5 queda en $2\times2\times2:3\times3\times7$ ú 8:63, que es la misma que ántes.

Como al formar una razon compuesta, se puede poner en lugar de cualquier razon simple, otra que sea igual con ella, se sigue que despues de formada, se podrá hacer igualmente esta sustitucion, poniendo el antecedente en vez del antecedente y el consecuente en vez del consecuente. Así, cuando voy á formar la razon compuesta de las 3:5 y 6:7, en vez de esta podré poner su igual 12:14 ó 18:21; y en vez de la compuesta $3\times6:5\times7$ tendré $3\times12:5\times14$ ó $3\times18:5\times21$; luego inversamente, si tengo la razon compuesta

$3\times18:5\times21$, en vez de la componente 18:21 podré poner cualquiera de sus iguales 12:14, ó 6:7; y la tendré convertida en $3\times12:5\times14$, ó $3\times6:5\times7$. Esta proposicion es de la mayor importancia, y los principiantes suelen encontrar muchas dificultades en ella, cuando no se presenta con toda esta especificacion.

190 *Si dos ó mas proporciones se multiplican ordenadamente, el resultado será una proporcion compuesta.* Porque siendo las razones componentes de la primera razon compuesta, iguales (por la naturaleza de las proporciones) con las componentes de la segunda, las razones compuestas serán iguales y formarán proporcion. Así, si tenemos las proporciones (a), (b), multiplicadas darán la compuesta (c).

$$\begin{array}{l} 4:\ 5::\ \ 8:\ 10\ \text{(a)} \\ 6:11::\ 18:\ 33\ \text{(b)} \\ \hline 24:55::144:330\ \text{(c)} \end{array}$$

Luego multiplicando ordenadamente una proporcion por sí misma, el resultado formará proporcion; de donde resulta que *si cuatro cantidades están en proporcion, tambien lo estarán sus cuadrados, sus cu-*

bos, y en general las potencias de un mismo grado; y al contrario, *si cuatro cantidades están en proporcion, tambien lo estarán sus raices de un mismo grado.*

En efecto, la proporcion $a:b::c:d$ da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

y elevando á la potencia n resultará $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$;

y formando proporcion será $a^n:b^n::c^n:d^n$, que es L. 1.° Q. D. D.

La misma proporcion $a:b::c:d$ da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

y estrayendo la raiz del grado n será

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}} \text{ ó } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}},$$

que da $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$, que es L. 2.° Q. D. D.

191 Al formar proporciones compuestas, convendrá simplificar las razones al tiempo de sacarlas; pero particularmente conviene tener presente, que *si dos razones son tales que en la una es antecedente lo que en la otra consecuente, se omite el término comun, y se ponen los otros.* Así, si tenemos

$\left.\begin{matrix} P:Q::a:b \\ Q:R::c:d \end{matrix}\right\}$ se tendrá $P:R::ac:bd$;

porque si se hiciera con estension seria $PQ:QR::ac:bd$; y simplificando la primera razon por Q, resultaria por último $P:R::ac:bd$.

De la regla de tres y de compañía.

192 Se llama *regla de tres ó regla de oro*, la que enseña á determinar los efectos por medio de las causas, ó las causas por medio de los efectos, cuan-

do se conoce la dependencia que tienen entre sí.

La regla de tres puede ser *simple* y *compuesta*; es simple, cuando para determinar el efecto ó causa que se busca, solo se atiende á una circunstancia; y compuesta, cuando se necesita atender á dos ó mas.

La regla de tres simple se subdivide en *directa* é *inversa*; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, ó la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie. Para que se vea bien la diferencia que hay entre las reglas de tres, nos valdrémos de estos ejemplos.

1.° *Si sabiendo que 12 oficiales de sastre han hecho en una semana 72 vestuarios, quiero averiguar cuántos vestuarios podrán hacer 24 sastres en el mismo tiempo, esto es, en una semana*: esta es una regla de tres simple; porque el número de vestuarios que busco, solo depende de una circunstancia, á saber, del número de oficiales de sastre que los han de hacer; ademas es directa, porque trato de averiguar los vestuarios, esto es, el efecto que han de producir los 24 sastres, que son la causa, por medio del conocimiento que tengo del que han producido en las mismas circunstancias 12 sastres.

Tambien seria simple y directa la regla de tres, si viniese propuesta en estos términos: *si 12 sastres han hecho en una semana 72 vestuarios, para hacer en el mismo tiempo 144 vestuarios, ¿cuántos sastres se necesitarán?* Porque aquí se trata de averiguar la causa, esto es, los oficiales de sastre que se necesitan para hacer los 144 vestuarios, que son el efecto, por medio del efecto conocido 72 vestuarios que han hecho los 12 sastres.

2.° *Si sabiendo que 12 sastres han hecho en tres dias 72 vestuarios, quiero averiguar cuántos sastres*

se necesitarán para hacer los mismos 72 vestuarios en 6 dias, esta regla de tres será inversa; porque aquí tengo un mismo efecto, 72 vestuarios, para cuya produccion han concurrido dos causas, los 12 sastres y los tres dias que han trabajado; y ahora trato de determinar una de las causas, á saber, el número de sastres, que junta con la otra, es decir, con los 6 dias en que han de trabajar, ha de producir el mismo efecto de hacer los 72 vestuarios.

3.° *Si sabiendo que 12 sastres han hecho en 4 dias 72 vestuarios, quiero averiguar los vestuarios que harán 36 sastres en 6 dias*: esta regla de tres será compuesta; porque el número de vestuarios que busco, depende de dos circunstancias, á saber, de los 36 sastres, y de los 6 dias que han de estar trabajando.

193 Toda cuestion que conduce á una regla de tres, consta de dos partes: del *supuesto* y la *pregunta*; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto; y en la pregunta, la causa ó efecto que se da, para determinar el efecto ó causa que se busca.

En toda regla de tres simple entran tres cantidades conocidas: dos del supuesto, y una de la pregunta; como esta ha de ser de la misma especie que una de las del supuesto, á las dos cantidades conocidas que son de una misma especie, se les llama *principales*; la otra y la que se busca, se llaman *relativas*; pero como de las relativas solo se conoce una, se llama cantidad principal y su relativa á las dos del supuesto, siendo la principal la que es de la misma especie que la de la pregunta. V. g. cuando quiero averiguar los vestuarios que harán 24 sastres en el supuesto de que 12 hayan hecho 72 vestuarios, las dos cantidades principales son los 12 sastres y los 24; las relativas son los 72 vestuarios y los que busco; y las que se llaman cantidad principal y su relativa son los 12 sastres y los 72 vestuarios, siendo la principal los 12 sastres que es la de la misma especie que la de la pregunta.

194 Toda la dificultad de la regla de tres consiste en plantearla; porque despues todo está reducido á encontrar el cuarto término de una proporcion geométrica. Por lo cual vamos á deducir reglas generales para su planteo.

Si la regla de tres es directa, y se pide el efecto que producirá la causa c, sujeta en las mismas condiciones en que la causa a ha producido el efecto b, como no conocemos este efecto le llamarémos x; y siendo b el efecto que ha producido a, el efecto producido por cada unidad de a será (§ 58, 4.°) $\frac{b}{a}$; y como la c ha de producir x, una unidad de c producirá $\frac{x}{c}$; ahora, por ser c y a de la misma especie, será igual el efecto que produzca cada una de sus unidades; luego se tendrá $\frac{b}{a}=\frac{x}{c}$, que formando proporcion, será $b:a::x:c$ ó $a:b::c:x$ ó $a:c::b:x$.

Luego para plantear una regla de tres directa, *se pondrá por primer término la cantidad principal del supuesto; luego, cualquiera de las otras dos, á saber, la relativa del supuesto ó la principal de la pregunta; despues la otra, y el cuarto término de la proporcion será lo que se busca*; que para encontrarle se practicará lo dicho (181).

Entendido esto, pasarémos á resolver algunos ejemplos.

1.° *Se sabe que 40 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 160 varas de trinchera; para abrir 800 varas en el mismo tiempo, cuántos soldados se necesitarán?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son 160 varas y 40 soldados; luego plantearémos la cuestion del modo siguiente:

$$160^{v.^s} : 800^{v.^s} :: 40^{sold.^s} : x = \frac{40 \times 800}{160} = 200,$$

y saco que se necesitan poner á trabajar 200 hombres.

2.° *Un sujeto desea saber lo que le producirán 78437 rs. que va á imponer en un fondo al 6 por 100.* Aquí la cantidad principal del supuesto es 100; porque la cuestion quiere decir que 100 reales le dan de rédito al año 6 reales; y así, la operacion se ejecutará como aquí se ve:

$$100 : 78437 :: 6 : x = \frac{78437 \times 6}{100} = \frac{470622}{100} =$$

$$4706{,}22 = 4706 \text{ rs. y } 7 \text{ mrs.}$$

195 Si la regla de tres es inversa, y se supone que las dos causas a y b han producido un efecto K, y dada una causa c de la misma especie que a, se quiere averiguar otra causa x de la misma especie que b, que junta con la c, produzca el mismo efecto K; discurrirémos de este modo. Si la causa a sola produjese el efecto K, una unidad de a produciria $\frac{K}{a}$; ahora, este efecto debe ser tanto menor en cuanto la causa a sea ayudada de la b; luego el efecto que produzca una unidad cuando obra la causa b, será $\frac{K}{ab}$.

Por la misma razon, el efecto de una unidad de c si obrase sola, seria $\frac{K}{c}$;

y obrando la causa x que buscamos, deberia ser $\frac{K}{cx}$;

y como a y c son de una misma especie, el efecto de cada una de sus unidades será igual, y se tendrá

$$\frac{K}{ab} = \frac{K}{cx}, \text{ ó } Kcx = Kab,$$

y dividiendo por K será $cx=ab$,
que da $c:a::b:x$ ó $c:b::a:x$;
que manifiesta que la regla de tres inversa se plantea *escribiendo por primer término la cantidad principal de la pregunta, despues las dos del supuesto, y el cuarto término será lo que se pide*; que se hallará por lo dicho (181).

Apliquemos esta regla á algunos ejemplos.

1.° *Un comerciante ha ganado en 5 meses 450 doblones, con un capital de 6000 doblones; para ganar los mismos 450 doblones con un capital de 1800 doblones, cuánto tiempo necesitará?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son 6000 doblones y 5 meses, y la principal de la pregunta es 1800 doblones; por lo que ejecutando la operacion como aquí se ve:

$$1800^{d.^s}:6000^{d.^s}::5^{m.^s}:x=$$

$$\frac{6000\times5}{1800}=\frac{60\times5}{18}=\frac{10\times5}{3}=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3},$$

hallo que necesitará 16 meses y $\frac{2}{3}$, que equivalen á 16 meses y 20 dias.

2.° *Un general de trinchera tiene calculado que con poner 3000 hombres á trabajar, ya á la zapa, ya á la trinchera, llegará en 6 dias á hacer todas las obras que necesita para llegar al camino cubierto; tiene aviso de su mayor General que es indispensable tomar el camino cubierto dentro de 4 dias; cuántos hombres necesitará poner á trabajar?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son 6 dias y 3000 hombres, y la principal de la pregunta es 4 dias; por lo cual plantearé la cuestion en estos términos:

$$4^{d.^s}:6^{d.^s}::3000^{h.^s}:x=\frac{3000\times6}{4}=1500\times3=4500 \text{ homb.}$$

que son los que tendrá que poner á trabajar.

196 Para resolver una regla de tres compuesta,

se halla primero el resultado que corresponde á la pregunta, atendiendo á una sola circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, considerándole como pregunta, atendiendo á otra circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado; atendiendo á otra circunstancia; y así sucesivamente, como manifiestan estos ejemplos.

1.° *Quiero averiguar los cahices de trigo que podrán traer 36 carros en 6 dias, en el supuesto de haber traido 12 carros en 4 dias 72 cahices.* Primero averiguaré los cahices que traerán los 36 carros en 4 dias, lo que ejecutaré como aquí se ve:

$$12\text{ carr.} : 36\text{ carr.} :: 72\text{ cah.} : x\text{ cah.} = \frac{72 \times 36}{12} = 72 \times 3 = 216;$$

y encuentro que traerán 216 cahices. Ahora, si en 4 dias traen 36 carros 216 cahices, en 6 dias cuántos traerán? Ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$4^{d.^s} : 6^{d.^s} :: 216 \text{ cahices} : x = \frac{216 \times 6}{4} = 54 \times 6 = 324,$$

y saco que traerán 324 cahices.

2.° *Sé que 4 soldados en 5 dias, trabajando en cada dia 8 horas, han hecho 1200 fajinas: 6 soldados en 8 dias, trabajando 6 horas al dia, ¿cuántas fajinas harán?*

Aquí tendré que hacer las tres reglas de tres simples siguientes:

$$4^s : 6^s :: 1200^{faj.^s} : 1800^{faj.^s}$$

$$5^d : 8^d :: 1800^{faj.^s} : 2880^{faj.^s}$$

$$8^h : 6^h :: 2880^{faj.^s} : 2160^{faj.^s}$$

y saco que harán 2160 fajinas.

197 Se llama *regla de compañía* la que enseña á determinar cuánto corresponde de la ganancia ó pérdida á cada uno de muchos compañeros que han puesto su caudal en un fondo, con arreglo á lo que pu-

so cada uno. Esta, como se suele decir, es de dos modos: *simple* y *compuesta* ó *con tiempo*; se acostumbra llamar simple, cuando el caudal que tiene cada uno en el fondo, permanece un mismo tiempo; y compuesta, cuando no permanecen los caudales el mismo tiempo en el fondo. Esta, se reduce á la simple, multiplicando el tiempo por lo que puso cada uno; pues lo mismo es 50 doblones en dos años que 100 en un año. Esta regla se funda en la siguiente cuestion.

Partir un número dado a en las partes que se quiera, v. g. en tres, que tengan entre sí la misma razon que las cantidades dadas m, n, p; esto es, que la primera tenga con la segunda la razon de $m:n$, y la primera con la tercera la razon de $m:p$.

Si llamo x la primera parte, será

$$m:n::x:\frac{nx}{m} \text{ la segunda, y } m:p::x:\frac{px}{m} \text{ la tercera;}$$

y como todas juntas han de equivaler á a, se tendrá

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a;$$

que quitando los divisores será $mx+nx+px=ma$, ó descomponiendo en factores $x(m+n+p)=ma$,

de donde se saca $x=\dfrac{ma}{m+n+p}=m\times\dfrac{a}{m+n+p}$.

Si sustituimos este valor de x en lo que correspondia á la segunda, y simplificamos, se tendrá

$$\frac{nx}{m}=\frac{na}{m+n+p}; \text{ y la tercera será } \frac{px}{m}=\frac{pa}{m+n+p};$$

cuyos resultados manifiestan, que podemos hallar cada una de estas partes, por medio de la siguiente proporcion: $m+n+p$ (suma de las puestas) $:a$ (ganancia ó pérdida) :: *lo que puso cada uno: á la ganancia ó pérdida que le corresponde.*

Ejemplo. Si de tres sugetos el primero ha puesto

en un fondo 500 doblones, 720 el segundo, y 300 el tercero, y han ganado 456 doblones; para hallar lo que corresponde á cada uno, será

$$m=500,\ n=720,\ p=300,\ \text{y}\ m+n+p=1520,$$

luego será la parte del 1.° $=\frac{500\times456}{1520}=150$ dobl.,

la del segundo.............. $=\frac{720\times456}{1520}=216$ dobl.,

y la del tercero.............. $=\frac{300\times456}{1520}=90$ dobl.;

cuyas partes componen la ganancia total 456 doblones.

El no haber contado con el tiempo, indica que las puestas permanecieron uno mismo en el fondo; pero si el primero la hubiese puesto por 8 meses, el segundo por 10, y el tercero por 5, siendo la misma ganancia, para hallar lo que corresponde á cada uno se observará que 500 doblones puestos por 8 meses, es lo mismo que 500×8 por un solo mes; 720 doblones puestos por 10 meses, es lo mismo que 720×10 doblones por un solo mes; y 300 doblones puestos por 5 meses, equivalen á 300×5 por un solo mes; de manera, que las puestas serán 4000; 7200 y 1500, cuya suma es 12700; y en este caso

tocará al primero $\frac{456\times4000}{12700}=143\frac{79}{127}$,

al segundo $\frac{456\times7200}{12700}=258\frac{66}{127}$,

y al tercero $\frac{456\times1500}{12700}=53\frac{109}{127}$,

cuya suma es igual 456 como ántes.

Esc. En las corporaciones y regimientos, ocurre con bastante frecuencia el hacer gastos que han de satisfacer los individuos ú oficiales á proporcion

de sus sueldos; para determinar la cuota de cada uno se dirá: *el sueldo total de los individuos es al gasto que se ha hecho, como el sueldo de cada uno es á la parte que tiene que pagar.*

De las progresiones aritméticas y geométricas.

198 Se llama *progresion aritmética* una serie ó continuacion de términos, tales que cada uno lleva al que le precede ó sigue un mismo esceso ó diferencia; cuando lleva al que le precede, la progresion se llama *creciente*; y cuando lleva al que le sigue, *decreciente*.

Se llama *razon* ó *diferencia*, lo que se debe añadir (ó quitar) á un término, para que se convierta en el que le sigue; aquí se tratará solo de las crecientes, pues sus propiedades son las mismas, mudando el signo á la diferencia. Para escribir una progresion aritmética se pone una proporcion continua (175), y se continúa como aquí se ve: $\div 2.5.8.11.14.17.20.23$&c. Donde el signo $\div$ indica que cada término medio se ha de repetir.

Si al primer término le llamamos a, y d á la razon, la espresion
$\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d...a+(n-1)d=u$ (A), será una progresion aritmética general.

De la definicion de la progresion aritmética resulta, que *el segundo término es igual al primero mas la razon*; que *el tercero es igual al segundo mas la razon*; pero como el segundo es igual al primero mas la razon, *el tercero será igual al primero mas dos veces la razon*; *el cuarto se compondrá del tercero mas la razon*, ó *del primero mas tres veces la razon*; y en general *un término cualquiera se compondrá del primero, mas tantas veces la razon como términos hay ántes de él*: que es lo que espresa la fórmula (A), en que u es el término que se busca, n el lugar que ocupa en la progresion, a el primero, y d la diferencia ó razon.

Con dicha fórmula (A) se puede hallar un térmi-

no cualquiera en conociendo el primero y la razon. Así, si en la progresion anterior se quiere el término séptimo, será $a=2$, $d=3$, $n=7$, y se tendrá térm.°7.°$=2+(7-1)\times3=2+6\times3=2+18=20$.

199 De la formacion de la progresion se deducen varias consecuencias.

1.ª *Cuatro términos consecutivos, tomados donde se quiera, forman proporcion discreta.*

Así, 5.8:11.14.

2.ª *Tres términos consecutivos la forman continua.*

Así, ÷5.8.11.

3.ª *Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos, tómense donde se quiera*; porque la razon de los dos primeros (que es la de la progresion) es la misma que la de los dos últimos. Así, 5.8:17.20.

4.ª *Dos términos cualesquiera están en proporcion discreta con otros dos términos cualesquiera, que disten entre sí tanto como los dos primeros distaban*; porque la razon en ambas equivale á tantas veces la de la progresion como términos hay en medio mas uno.

Así, 5.11:17.23.

5.ª *Tres términos cualesquiera, tales que los dos estremos disten igualmente del medio, forman proporcion continua*; porque la razon entre el primero y el medio es la misma que entre el medio y el estremo; pues ambas equivalen á tantas veces la de la progresion, como términos hay entre ellos mas uno.

Así, ÷5.14.23.

6.ª *La suma del primer término y último es igual á la suma de dos términos cualesquiera, equidistantes de los estremos; é igual al duplo del término medio, si el número de términos es impar.* Porque el primer término y el segundo forman proporcion con el penúltimo y el último (cons. 3.ª), y dan (176) que el segundo junto con el penúltimo serán iguales con el primero junto con el último; el primero y el tercero forman proporcion con el antepenúltimo y último, y darán que la suma del primero con el último equi-

valdrá á la del tercero y antepenúltimo; y así de los demas.

200 Fundados en esta propiedad vamos á encontrar la suma de tantos términos como se quiera de una progresion aritmética. Para esto sea la progresion general $\div a.b.c.d....q.r.t.u$; llamando s la suma de los términos hasta u, que considerarémos ser el último, y observando que la suma no se altera aunque se escriba al reves, tendrémos poniendo debajo de la suma ella misma escrita en un órden inverso:

$$\left.\begin{array}{l} s=a+b+c+d....q+r+t+u \\ s=u+t+r+q....d+c+b+a \end{array}\right\}$$ Y sumando estas dos ecuaciones será

$$2s=(a+u)+(b+t)+(c+r)+(d+q)....$$
$$(q+d)+(r+c)+(t+b)+(u+a).$$

Y como $a+u=b+t=c+r=$&c. (cons. 6.ª), sustituyendo se tendrá

$$2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)....$$
$$+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u);$$

donde veo que el duplo de la suma equivale á tantas veces la suma del primer término y último, como términos hay en la progresion; luego si llamo n al número de términos tendré $2s=(a+u)\times n$; de donde despejando $s=\frac{1}{2}(a+u)\times n=(a+u)\times\frac{1}{2}n$; que nos dice que *la suma de todos los términos que se quieran de una progresion aritmética, se halla sumando el primer término con el último, y multiplicando esto por la mitad del número de los términos.*

Así, la suma de 7 términos de la progresion (198) será igual á $(2+20)\times\frac{7}{2}=22\times\frac{7}{2}=11\times7=77$, como en efecto se verifica.

201 Si en la ecuacion $u=a+(n-1)d$ despejo d, tendré $d=\dfrac{u-a}{n-1}$, la cual dice que conocido el último término, el primero y el número de ellos, para hallar la razon *se resta el primero del último, y lo que queda se divide por el número de términos ménos uno.*

En esto se funda la interpolacion de un número cualquiera de medios aritméticos entre dos números ó cantidades dadas. Así, si quiero interpolar entre 7 y 43 ocho medios aritméticos, restaré el 7 del 43, y la resta 36 la dividiré por el número de términos que ha de haber ántes del 43; y como entre 7 y 43 ha de haber ocho medios, habrá ántes del 43 un término mas, á saber, el primero 7; luego esta resta *la deberé dividir por el número de medios que se han de interpolar mas* 1, esto es, por 9, y resultará que $\frac{36}{9}=4$, y los términos serán

$$\div 7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.$$

202 Se llama *progresion geométrica* una série ó continuacion de términos, que cada uno cabe en el que le precede ó sigue un mismo número de veces; cuando cabe en el que le sigue, la progresion es *creciente*; y cuando en el que le precede, *decreciente*.

Aquí se llama *razon* al número porque se ha de multiplicar un término cualquiera, para que resulte el que le sigue. Para escribir una progresion geométrica se pone una proporcion contínua (175), y se continúa como aquí se ve:

$\div\div 3:6:12:24:48:96:192:384$ &c. y escrita con estension será $3:6::6:12::12:24::24:48::$ &c. Si espresamos por a el primer término y por q la razon,

$\div\div a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6........aq^{n-1}=u$ (B), será una progresion geométrica general.

De la definicion de la progresion geométrica resulta que *el segundo término se compone del primero multiplicando por la razon; el tercero del segundo multiplicado por la razon*, pero como el segundo equivale al primero multiplicado por la razon, *el tercero equivale al primero multiplicado por el cuadrado de la razon; el cuarto se compone del primero multiplicado por el cubo de la razon*; y en general, *un término cualquiera se compone del primero multiplicado por una potencia de la razon, espresada por el número de términos que hay ántes de él*: que es lo que espresa la fórmula (B), en que u es el ter-

mino que se busca, n el lugar que ocupa, a el primero, y q la razon.

La fórmula (B) sirve para calcular un término cualquiera; v. g. si quiero hallar el sesto término de la anterior, tendré $n=6$, $a=3$, $q=2$, y será término 6.° $=3\times2^{6-1}=3\times2^5=3\times32=96$.

203 Es digna tambien de notarse aquí la analogía entre el lenguaje de las progresiones aritmética y geométrica; pues las propiedades de aquella se convierten en las de esta, sustituyendo *multiplicar* á la voz *sumar*; *cuadrar la razon* al *duplo* ó *dos veces la razon*; y en general *formar potencias de la razon* á *sumar muchas veces la razon*; y por lo mismo se verificará que 1.° *cuatro términos consecutivos forman proporcion geométrica discreta*; 2.° *tres consecutivos la forman contínua*; 3.° *dos términos consecutivos están en proporcion con otros dos consecutivos cualesquiera*; 4.° *dos términos cualesquiera forman proporcion con otros dos cualesquiera, que disten igualmente entre sí*; 5.° *tres términos equidistantes la forman contínua* &c.

204 Para hallar la suma de una progresion geométrica, llamarémos a el primer término, q la razon (por consiguiente aq será el segundo), u el último, y s la suma de todos los términos que buscamos; y observando (202) que todos los términos medios se han de repetir, resulta que todos los de la progresion serán antecedentes ménos el último, y por consiguiente la suma de estos será $s-u$; todos son consecuentes ménos el primero, y por consiguiente la suma de estos será $s-a$; luego por lo dicho (185, 1.ª) tendrémos

$$s-u:s-a::a:aq::1:q;$$

que multiplicando estremos y medios, nos dará

$$(s-u)\times q=(s-a)\times1, \text{ ó } sq-uq=s-a,$$

de donde sale $sq-s=uq-a$, ó

$$s(q-1)=uq-a, \text{ y } s=\frac{uq-a}{q-1} \text{ (m).}$$

Lo que dice que para hallar la suma de una progresion geométrica, *se multiplicará el último término por la razon, de esto se restará el primero, y la resta se dividirá por la razon ménos uno.* Asi, si quiero hallar 8 términos de la progresion (202), será $a=3$, $q=2$, $u=384$, y resultará

$$\textit{sum. de 8 términos}=\frac{384\times 2-3}{2-1}=\frac{768-3}{1}=765.$$

como en efecto se verifica.

Esc. Si en vez de u sustituimos en la fórmula (m) su valor aq^{n-1}, nos resultará

$$s=\frac{aq^{n-1}\times q-a}{q-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}\ (\mathrm{p}),$$

la cual servirá para hallar la suma de n términos de una progresion, cuando solo se conozca el primer término a y la razon q.

205 Si en la fórmula $u=aq^{n-1}$ despejo la q, sacaré $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$;

la cual podrá servir para interpolar medios geométricos entre dos números dados; para lo cual, *se dividirá el último término por el primero, y del cociente se estraerá una raiz del grado que esprese el número de términos que ha de haber en todos ménos uno; ó del grado que esprese el número de medios que se han de interpolar mas uno.*

Esc. 1.° Si la progresion fuese decreciente, la razon q seria un quebrado propio, y el término sustractivo aq^n de la fórmula (p) será tanto menor, cuando mayor sea el número n de términos que se vayan tomando; y tantos se podrán tomar, que dicho término llegue á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea; de donde se sigue que la diferencia entre el numerador de la fórmula (p) y el primer término a de la progresion,

podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad asignable; luego $\frac{a}{1-q}$ (r) es una cantidad á la cual se puede acercar todo lo que se quiera la suma de los términos de la progresion, y nunca puede dicha suma ser igual con ella. Es, pues, la espresion (r) como verémos dentro de poco, el *límite* de la suma de la progresion decreciente; y áunque se la suele mirar como si en efecto fuese la suma verdadera, es añadiendo la circunstancia de que la progresion esté continuada al *infinito*; pero como esta es una palabra de cuyo significado no podemos formarnos una cabal idea, advertimos que cuando nos valgamos de esta voz en algunas ocasiones, no querémos dar á entender otra cosa, sino que la cantidad á que la apliquemos ha llegado á ser tal, que la diferencia entre ella y su límite es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; por consiguiente la sustitucion del límite en vez de ella, sólo se debe mirar como una espresion abreviada del largo razonamiento que se deberia hacer para darla á conocer circunstanciadamente. Esto supuesto, la fórmula (r) traducida en regla bajo estos principios, nos dará que para hallar la suma de una progresion geométrica decreciente, continuada indefinidamente, *se dividirá el primer término por la diferencia que haya entre la unidad y la razon.*

Por esta causa la suma de la progresion

$$\div\!\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \text{\&c. es } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Esc. 2.° En este resultado observamos que siendo 2 la suma de todos los términos, y 1 el primero, todos los términos que siguen al primero no valdrán mas de 1; siendo la suma total 2, y $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ la de los dos primeros términos, todos los que siguen al segundo valdrán $\frac{1}{2}$ &c.; luego en este

caso *un término cualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen.*

Esc. 3.° Si la progresion fuese $\div\div 1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\frac{1}{27}:$&c. cuya suma es $s=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$ se tendrá que como el primero vale 1, los demas valdrán ménos de 1, esto es, $\frac{1}{2}$; el primero y segundo valen $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$, que para $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$, sólo le falta $\frac{1}{6}$, esto es, menos de $\frac{1}{3}$; luego aquí un *término cualquiera es mayor que la suma de todos los que le siguen.*

Esc. 4.° Si la progresion fuese $\div\div 1:\frac{3}{5}:\frac{9}{25}:\frac{27}{125}:$ &c. cuya suma es $s=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$; se tendrá que valiendo 1 el primer término, los demas valdrán $\frac{3}{2}$, esto es, mas que el primero; el primero y segundo valen $1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}=\frac{16}{10}$, que para $\frac{5}{2}=\frac{25}{10}$; le faltan $\frac{9}{10}$, que es mayor que $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ &c. &c.; luego en este caso *un término cualquiera es menor que la suma de todos los que le siguen.*

Cor. general Luego *en una progresion geométrica decreciente, un término cualquiera puede ser igual, mayor ó menor, que la suma de todos los que le siguen*, segun sea cada término igual, menor ó mayor que la mitad del anterior.

De los logaritmos.

206 Si reunimos dos progresiones, una aritmética y otra geométrica, de modo que se correspondan sus términos como aquí se ve:

$$\begin{cases} \div 4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.\ \&c. \\ \div\div 3:6:12:24:48:96:192:384:768:1536:\ \&c. \end{cases}$$

los términos de la aritmética se llaman *logaritmos* de los correspondientes de la *geométrica*, que toman el nombre de *números*. Como son infinitas las progresiones que se pueden elejir, se sigue que es

infinita la diversidad de logaritmos; pero si entre las progresiones se elige la arimética, que principiando por o siga despues por la série de los números naturales, y la geométrica que empiece por la unidad, entónces se tiene un *sistema de logaritmos*. V. g.

$$\left.\begin{matrix} \div 0.1.2.3.4.5.6.\&c. \\ \div\div 1:4:16:64:256:1024:4096:\&c. \end{matrix}\right\}\text{forman un sistema.}$$

Donde debemos observar que los términos de la aritmética son los esponentes á que se ha de elevar el segundo término de la geométrica, para producir cualquier término; pues 64 v. g. es 4^3, y 3 es el logaritmo ó término de la aritmética correspondiente á 64; y como puede elejirse cualquiera otro número para segundo término de la geométrica, resulta que tambien *puede haber muchos sistemas de logaritmos.*

Esto entendido, se llama *base* en un sistema de logaritmos al segundo término de la progresion geométrica, cuyo logaritmo es la unidad, y de cuyas potencias van resultando los demas; y logaritmo de un número *es el esponente á que se ha de elevar la base para producir dicho número.*

207 Sea, pues, a la base de un sistema cualquiera, x un logaritmo y z su número, y se tendrá

$x=\log.z$ y a^x ó $a^{\log.z}=z$;

igualmente, siendo $x'=\log.z'$,

se tendrá $a^{x'}=a^{\log.z'}=z'$

1.° Si multiplicamos estas dos ecuaciones, tendrémos $a^x \times a^{x'}=zz'$ ó $a^{x+x'}=zz'$; pero $x+x'$ es el esponente á que se ha de elevar la base a, para que resulte el producto zz'; luego será su logaritmo, y se tendrá $x+x'=\log.zz'$; y como $x=\log.z$ y $x'=\log.z'$, sustituyendo resultará

$\log.z+\log.z'=\log.zz'$; que quiere decir que *para hallar el logaritmo de un producto se han de sumar*

los de los factores; y el número que en las tablas del sistema corresponda á esta suma, será el producto. Así, si quiero multiplicar 16 por 256, diré: log. 16=2, log. 256=4; y su suma =6 será el logaritmo del producto: y como 6 corresponde á 4096, infiero que este es el producto de 16 por 256, como en efecto se verifica.

2.° Dividiendo las mismas dos ecuaciones; se tendrá $\frac{a^x}{a^{x'}}=\frac{z}{z'}$ ó $a^{x-x'}=\frac{z}{z'}$;

y como ahora $x-x'$ es el esponente á que se ha de elevar la base para producir el cociente ó número $\frac{z}{z'}$, este esponente será su logaritmo, y se tendrá

$$x-x'=\log.\frac{z}{z'},\text{ ó }\log.z-\log.z'=\log.\frac{z}{z'};$$

que quiere decir, que *para hallar el logaritmo de un cociente, se restará el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo; y el número que en las tablas corresponda á esta diferencia, será el cociente que se busca.* Así, si quiero dividir 1024 por 16, diré: log. 1024=5, log. 16=2; y su diferencia =3 será el logaritmo del cociente; y como este 3 corresponde al número 64, este será el cociente y se tendrá $\frac{1024}{16}=64$, como en efecto se verifica.

3.° Si elevamos á diferentes potencias la ecuacion anterior $a^x=z$, ó $z=a^x$, será

$$z^2=(a^x)^2=a^{2x},\ z^3=(a^x)^3=a^{3x},\ldots.z^n=(a^x)^n=a^{nx};$$

de donde sale (por ser nx el esponente á que se ha de elevar la base a para producir z^n) que

$$\log.z^n=nx=n\log.z;$$

que quiere decir, que *para hallar el logaritmo de una potencia, se ha de multiplicar el logaritmo de la raiz (ó cantidad) por el esponente de la potencia, y el número que en las tablas corresponda al producto hallado, será la potencia que se pide.* Así, si quiero

formar la tercera potencia de 16, diré: log. $16=2$, que multiplicado por 3 (esponente de la potencia) da 6; y como 6 corresponde al número 4096, infiero que $16^3=4096$, como en efecto se verifica.

4.° Si de la ecuacion $z=a^x$ estraemos raices de diferentes grados, tendrémos

$$\sqrt{z}=\sqrt{a^x}=a^{\frac{x}{2}};\ \sqrt[3]{a^x}=a^{\frac{x}{3}};\ldots\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a^x}=a^{\frac{x}{n}};$$

de donde sale (por ser $\frac{x}{n}$ el esponente á que se ha de elevar la base a para producir el número $\sqrt[n]{z}$), que log. $\sqrt[n]{z}=\frac{x}{n}=\frac{\log.z}{n}$;

que quiere decir que *para hallar el logaritmo de una raiz, se ha de dividir el logaritmo de la cantidad por el esponente de la raiz; y el número que en las tablas corresponda á este cociente, será la raiz que se pide.* Así, si quiero estraer la raiz cuadrada de 4096, diré: log. $4096=6$, que dividido por 2 (esponente de la raiz) da 3; y como 3 corresponde al número 64, digo que 64 es la raiz de 4096, ó que $\sqrt{4096}=64$, como en efecto se verifica.

208 Como el sistema de numeracion sigue su ley constante de diez en diez, tambien se ha elejido este número para base del sistema logarítmico mas usual; de modo que para la formacion de las tablas se han reunido las dos progresiones siguientes:

$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$.&c.
$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000$:&c.

Si en ellas se interpolase entre cada dos términos un número considerable de medios, los resultados formarian dos nuevas progresiones sumamente largas; y tomando en la geométrica los números naturales 1, 2, 3, 4, 5 &c. hasta 10000, hasta 108000,

(de todas estas hay tablas impresas) hasta 200000, (de estas las hay calculadas, pero no impresas) &c. poniéndolos en columna, y en otra á su derecha los términos correspondientes de la aritmética ó los logaritmos, se tendrian formadas las tablas como vulgarmente se presentan.

En todas las tablas de logaritmos está esplicada su disposicion particular, y las reglas para manejarlas; y como para entender estas dos cosas, suele aprovechar mas media hora de viva voz del Profesor, que toda la esplicacion que se puede poner en un libro de la naturaleza de este, y por otra parte en nuestro *Tratado elemental* decimos muy circunstanciadamente todo lo necesario para la inteligencia y uso de las de D. Tadeo Lope y Aguilar, que son de las que nos servimos, tanto en aquella obra como en esta, para todas las operaciones: y por otra parte, como esta misma esplicacion conviene á las otras tablas que hay publicadas, omitirémos aquí todo esto, y sólo harémos algunas observaciones.

209 Puesto que $10^0=1$, y $10^1=10$, verémos que $\log.1=0$, $\log.10=1$; luego el logaritmo de todo número dijito, como 2,3,4&c. ha de ser mayor que 0 y menor que 1; esto es, será un quebrado decimal. Igualmente, como $10^1=10$ y $10^2=100$, se inferirá que el logaritmo de todo número de dos cifras, desde 11 hasta 99 inclusive, ha de ser mayor que 1 y menor que 2, esto es, será *un entero* y un quebrado decimal. Del mismo modo se inferirá que el de todo número de tres cifras, desde 101 hasta 999 inclusive, será mayor que 2 y menor que 3; esto es, *dos enteros* y un quebrado decimal. Y en general que el logaritmo de todo número compuesto (escepto la unidad seguida de ceros) *consta de tantas unidades en enteros, como cifras tiene el número ménos una, y de un quebrado decimal*; si el número es la unidad seguida de ceros, su logaritmo *consta de tantas unidades como ceros acompañan á la unidad, y el quebrado decimal es cero.*

210 El número que espresa los enteros en los logaritmos, se llama *característica*, y el quebrado decimal se llama *mantisa*.

Luego dado un número, se puede conocer inmediatamente la característica de su logaritmo (209); y dado un logaritmo se puede saber inmediatamente las cifras que ha de tener el número en enteros, que *son tantas mas una como unidades tenga la característica*; por esta causa se suele omitir la característica en algunas tablas.

211 *Los logaritmos de los números que crecen en progresion décupla tienen una misma mantisa*; porque han de resultar de la suma del logaritmo del menor con el de 10, 100, 1000, &c. que son 1, 2, 3, &c. sin mantisa. V. g. la mantisa de 23 es la misma que la de 230, de 2300, de 23000 &c.; porque

$230 = 23 \times 10$ y (§ 207, 1.°) $\log. 230 = \log. 23 + \log. 10$;

$2300 = 23 \times 100$ y $\log. 2300 = \log. 23 + \log. 100$.

De donde resulta que *si se añade una unidad á la característica de un logaritmo, corresponde á un número diez veces mayor, ó equivale á multiplicar por diez dicho número; si se añaden dos unidades equivale á multiplicar por* 100 *el mismo número; y así sucesivamente. Y si se quita una unidad á la característica de un logaritmo, equivale á haber dividido su número por* 10; *si se le quitan dos, equivale á haber dividido su número por* 100, *&c. &c.*

212 Se llama *complemento aritmético* de un número, lo que le falta para valer la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene dicho número. Así, el complemento de los números díjitos es lo que les falta para 10; el de los números de dos cifras, es lo que les falta para 100, &c. De donde se sigue que para hallar el complemento aritmético de un número cualquiera, *se restará la cifra de las unidades de* 10 *y todas las demas de* 9; ó al contrario, que es lo mejor, *se restará, empezando por la izquierda, cada guarismo de* 9, *y el último significativo, ó el de*

las unidades de 10. Así, si quiero hallar el complemento de 357, diré: de 7 á 10 van 3; de 5 á 9 van 4; de 3 á 9 van 6; y tendré que
comp. arit. de 357=643; ó empezando por la izquierda diria: de 3 á 9 van 6; de 5 á 9 van 4, y de 7 á 10 (porque es el último) van 3, y tengo 643 como ántes; y haciendo la resta por el método ordinario (32) como aquí se ve (M): se halla lo mismo.

Si quiero hallar el de 8940, diré, empezando por la izquierda: de 8 á 9 va 1; de 9 á 9 va 0; de 4 á 10 (porque es el último significativo) van 6; de 0 á 0, va 0; y tengo comp.aritm.8940=1060.

(M)
1000
357
643

213 Se llama tambien *complemento logarítmico de un número* al complemento aritmético de su logaritmo. Así, si quiero hallar el complemento logarítmico de 85436 buscaré su logaritmo, y encontraré que es 4,9316409; y hallando el complemento de este, diciendo de 4 á 9 van 5; de 9 á 9 va 0; de 3 á 9 van 6; de 1 á 9 van 8; de 6 á 9 van 3; de 4 á 9 van 5; de 0 á 9 van 9; de 9 á 10 va 1: tendré que comp.log.85436=5,0683591.

214 El complemento aritmético convierte la operacion de restar en sumar; para lo cual *se suma con el minuendo el complemento aritmético del sustraendo, y en la suma se rebaja la unidad* (ó unidades) *correspondiente al complemento*; esto es, en las decenas, si el complemento fue á 10; en las centenas, si el complemento fue á 100, &c. Así, si quiero restar 438 de 787, con el 787 sumaré (A) el complemento de 438 que es 562, y en la suma 1349 tacharé el millar, y me quedará la resta verdadera 349.

(A)
787
562
~~1~~349

Esto se funda en que en vez de quitar de 787 el 438, le añado lo que le falta para mil; luego no sólo tendré que quitar el 438, sinó ademas el 562; y como todo compone 1000, por eso se borra en la suma, donde corresponde, la unidad del complemento.

215 La importancia del complemento es cuando hay que hacer sumas y restas con las cantidades; pues entónces *sumando los complementos de las que se han de restar, y rebajando las unidades donde corresponda, con una sola operacion se hacen todas.* Esto es lo que sucede en las proporciones, en que se quiere calcular el cuarto término por logaritmos; pues como su logaritmo se compondrá de la suma de los logaritmos de los medios, ménos el logaritmo del primero: en vez de sumar y restar, *se suma con los logaritmos de los medios el complemento logarítmico del primero; y rebajando la decena en la característica, se tendrá el logaritmo del cuarto término.* Así, si quiero hallar por logaritmos el cuarto término de esta proporcion $864:1329::4635:x$,

con..................log.$1329=$ $3,1235250$

sumo..............log.$4635=$ $3,6660497$

y..............comp.log.$864=$ $7,0634863$

---

y tendré.............log.$x=\cancel{1}3,8530610=$log.$7129,53$.

cuyo número será el cuarto término que se pide.

216 Por estensas que sean unas tablas, nunca pueden contener los logaritmos de todos los números; pero por su medio se pueden hallar. En efecto, si se quiere hallar el logaritmo de un número misto, *se reducirá el entero á la especie del quebrado que le acompaña* (71), *y estará reducido á hallar el logaritmo de un cociente* (207, 2.°). Así, si se pide el logaritmo de $25\frac{4}{9}$, diré: log.$25\frac{4}{9}=$log.$\frac{229}{9}=$ log.$229-$log.$9=2,3598355-0,9542425=1,4055930$

Si en vez de reducir el entero á la especie del quebrado, se convirtiese este en decimal con cinco guarismos, seria $25,44444$; en este caso, poniendo 1 de característica, se encontraria que la mantisa es $4055854+75=4055929$, y log.$25,44444=1,4055929$, que sólo se diferencia del anterior en 1 en el séptimo guarismo decimal, que en nada influye.

217 El logaritmo de todo quebrado es *negativo*

ó *defectivo*, como manifiesta la ecuacion $a^m = n$, en que si n ha de ser un quebrado, debe (118) por precision la m ser *negativa*, pues la base a es un número entero. Pero como nosotros hemos sentado por regla general, que cuando se hayan de calcular quebrados se conviertan en decimales, sólo tratarémos de estos introduciendo el complemento logarítmico, para evitar los logaritmos negativos. Así, si quiero el logaritmo de 0,37, diré: $\log.0,37 = \log.\frac{37}{100} =$

$\log.37 - \log.100 = \log.37 + \text{comp.}\log.100$;

por consiguiente con $\log.37 = 1,5682017$

sumo..............comp.log.100=8,

y tengo..................log.0,37=9,5682017.

Si fuera $\log.0,037 = \log.\frac{37}{1000}$, diria:

con.........................log.37=1,5682017

sumo ....comp.log.1000=7,

y tengo.................log.0,037=8,5682017.

Si fuera $\log.0,0037 = \log.\frac{37}{10000}$, diria:

con.............................log.37=1,5682017

sumo...........comp.log.10000=6,

y tengo...............log.0,0037=7,5682017;

y del mismo modo seria log.0,00037=6,5682017,&c

Donde observando que en todos ellos es la mantisa una misma, que es la de los guarismos significativos 37, y la característica respectiva 9,8,7,6 &c., se deduce por regla general, que *el logaritmo de todo quebrado decimal tiene por característica 9, ó tantas unidades ménos que 9, como ceros hay entre la coma y los guarismos significativos, y por mantisa la misma que la de estos.*

218 Recíprocamente, si se pidiese el quebrado decimal á que correspondia un logaritmo dado, *se pondria o y coma; despues se pondrian tantos ceros como unidades faltasen á la característica para 9; y luego las cifras significativas que correspondiesen á la*

mantisa. Así, se tiene $9{,}6542343=\log.\ 0{,}45106$; $8{,}7725711=\log.0{,}059234$; $7{,}3765770=\log.0{,}00238$.

Aplicacion de los logaritmos á la estraccion de la raiz cúbica.

219 Si para formar el cubo de un número, preferimos á la multiplicacion el ejecutarlo por medio de los logaritmos (207, 3.°), respecto del 47 dirémos:

$$\log.47^3=3\times\log.47=3\times1{,}6720979=$$
$$5{,}0162937=\log.103823,$$

que es en efecto el cubo de 47.

Más para estraer la raiz cúbica de un número cualquiera, siempre se hará por logaritmos; para lo cual, *se dividirá* (207, 4.°) *el logaritmo del número por el esponente* 3; *y el número que corresponda á este cociente será la raiz cúbica, exacta ó aproximada.* Así, si quiero estraer la raiz cúbica de 592704 diré:

$$\log.\sqrt[3]{592704}=\frac{\log.592704}{3}=\frac{5{,}7728379}{3}=$$
$$1{,}9242793=\log.84;$$

por consiguiente la raiz cúbica del número 592704 es 84 exactamente. El que lo quiera comprobar puede formar el cubo de 84, y encontrará 592704.

Igualmente se tiene

$$\log.\sqrt[3]{75425}=\frac{\log.75425}{3}=\frac{4{,}8775153}{3}=$$
$$1{,}6258384=\log.42{,}2511;$$

$$\log.\sqrt[3]{7854679545}=\frac{\log.7854679545}{3}=\frac{9{,}8951286}{3}$$
$$=3{,}2983762=\log.1987{,}8159.$$

De las ecuaciones indeterminadas de primer grado.

220 Dejamos dicho (142) lo que se entiende por problema indeterminado, y ecuacion indeterminada.

Ahora añadimos, que se llama *cantidad constante* la que en una misma cuestion no puede tener mas de un solo valor; y *cantidad variable*, la que en una misma cuestion puede tener todos los valores que se quiera. V. g. si quiero dividir el 12 en dos partes, puedo decir que son 8 y 4, ó 7 y 5, ó 9 y 3, ó $10\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{2}$; ó 15 y -3 &c.; donde veo que las partes en que voy dividiendo el 12 son diferentes, y por lo mismo son *variables*; y el 12, que permanece uno mismo, es *constante*. El número de soluciones de una cuestion indeterminada, se limita en muchas ocasiones poniendo por condicion el que los números sean enteros y positivos. Las cantidades constantes se señalan con las primeras letras del alfabeto, y las variables con las últimas; así, $ax \pm bz = c$ que da $z = \pm\frac{c}{b} \mp \frac{ax}{b}$, es la forma general de las ecuaciones indeterminadas de primer grado entre dos variables x y z. Pasemos á resolver algunas cuestiones.

221 1.ª *Hallar dos números cuya suma sea 16.*

Res. Sean x y z los dos números que busco, y tendré planteado el problema en la ecuacion

$x+z=16$, que da $z=16-x$.

Ahora, dando valores á x, irán resultando para z los que aquí se ve:

Si $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$,
será $z=16$, $z=15$, $z=14$, $z=13$, $z=12$, $z=11$,
$x=6$, $x=7$, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
$z=10$, $z=9$, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1.

Donde se ve que la primera y penúltima no son soluciones, porque no dan dos números, pues resulta uno de ellos $=0$. La última tampoco es solucion, porque resulta un número negativo; y observando que la solucion $x=8$ á que corresponde $z=8$, no da dos números diferentes, se deducirá que el infinito número de soluciones que se podian dar á la cuestion, queda reducido á sólo siete; pues v. g. la $x=5$ que da $z=11$, es la misma que la $x=11$ que da

$z=5$. Por consiguiente, la cuestion en números enteros positivos y diferentes, sólo admite estas siete resoluciones:

1 y 15; 2 y 14; 3 y 13; 5 y 11; 6 y 10; 7 y 9.

222 2.ª *Dividir 53 en dos partes tales que la una sea divisible por 4, y la otra por 7.*

Res. Puesto que la una ha de ser divisible por 4, la podrémos llamar $4x$, y la otra será $7z$; y tendrémos $4x+7z=53$.

Ahora *se despeja la x, ó en general la variable que tenga menor coeficiente; si en su espresion resulta quebrado, se igualará con otra variable del mismo signo que la del quebrado; se despeja esta; y si en su valor resulta quebrado, se hace lo mismo, hasta llegar á una variable que determine exactamente la anterior; en este caso, se va sustituyendo en los valores de las antecedentes, y se tendrán las del problema, que solo dependerán de la última; se dan valores á esta, y se van formando las soluciones que satisfarán al problema.* Así, aplicando este método á la anterior, como se ve en (A), despejando x y sacando los enteros tendré la (ec.B); igualo el quebrado que me ha resultado, con otra variable u, y tengo el valor (C); (le pongo el signo ménos, porque el numerador debe ser negativo, si ha de ser entero, y de consiguiente el cociente de partir por 4 tambien lo será); despejo en esta la z y tengo el valor (D); igualo el quebrado con t, y tengo la (E); despejo la u y tengo el

(A) $$4x+7z=53$$

(B) $$x=\frac{53-7z}{4}=13-z+\frac{1-3z}{4}$$

(C) $$\frac{1-3z}{4}=-u \text{ ó } 1-3z=-4u$$

(D) $$z=\frac{4u+1}{3}=u+\frac{u+1}{3}$$

(E) $$\frac{u+1}{3}=t \text{ ó } u+1=3t$$

(F) $$u=3t-1$$

valor (F); ahora sustituyo este valor de u y t en el de z (D), y se convierte en (G); sustituyo el de z y el de u en el (B) de x, y sale el (H). Donde tengo los valores de las variables del problema, que solo dependen de la variable t; doy, pues, valores á esta empezando por cero, y tengo que

(G) $z = 3t - 1 + t = 4t - 1$

(H) $x = 13 - 4t + 1 - 3t + 1 = 15 - 7t$

si $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$
sale $z = -1$, $z = 3$, $z = 7$, $z = 11$
y $x = 15$, $x = 8$, $x = 1$, $x = -6$.

El valor $t = 0$ y $t = 3$ no satisfacen, porque dan negativa una de las partes del 53; luego solo tiene el problema dos soluciones: primera $t = 1$, que da $z = 3$, y $x = 8$, y las dos partes $4x$ y $7z$ del número serán 32 y 21, cuya suma $= 53$;
y segunda $t = 2$, que da $z = 7$ y $x = 1$; y las dos partes del número serán 4 y 49, cuya suma $= 53$.

223 3.ª *Un mercader compra paño de á 61 reales la vara, y paño de á 78; al ajustar cuentas encuentra que el paño de á 78 le ha costado 97 reales mas que el de á 61, cuánto compró de cada clase?*

Res. Sea x el paño de á 61, con lo que $61x$ será su valor; por lo mismo tambien será $78z$ el valor del paño de á 78; y como el de á 78 le ha costado 97 reales mas, se tendrá planteado el problema en la ecuacion $61x + 97 = 78z$, ó $61x = 78z - 97$.

De la que aplicando el mismo raciocinio de ántes, se sacará despues de haber sustituido las variables u, t, s, r, q, que $x = 78q + 47$, y $z = 61q + 38$.

Por consiguiente, dando valores, resulta que pudo comprar las siguiente varas de

	Si $q =$	0,	1,	2,	3,	4,	5, &c.
paño de á 61	$x =$	47,	125,	203,	281,	359,	437, &c.
Idem de á 78	$z =$	38,	99,	160,	221,	282,	343, &c.

Cuyos números satisfacen á la condicion de valer siempre 97 reales mas el paño de á 78 que el de á 61.

De las permutaciones y combinaciones.

224 Se llaman *permutaciones* los diferentes modos de disponer ó colocar muchas cosas las unas con respecto á las otras; y se llaman *combinaciones* los diferentes modos de tomar muchas cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres &c. sin atender al órden con que se han de colocar.

Sean, pues, las cosas por permutar las letras del alfabeto. Si tuviéramos una sola letra tal como a, esta no admitiria nada mas que una permutacion. Si tomamos ahora dos letras a y b, se podrá poner la a ántes ó despues de la b, en esta forma ab, ba; luego dos letras se pueden permutar de 2×1 maneras. Si suponemos ahora otra tercer letra c, esta se podrá colocar al principio, en medio y al fin de cada permutacion de las anteriores, y tendrémos las seis siguientes cab, acb, abc, cba, bca, bac;
luego tres cosas ofrecen un número de permutaciones espresado por $3\times2\times1$
y en general siguiendo el mismo raciocinio, determinaríamos que un número n de letras ó cosas, ofrece un número de permutaciones espresado por

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2\times1.$$

Es prodijioso el número de permutaciones que ofrecen las cosas; pues si suponemos que en una clase entren nueve discípulos, y se quiere averiguar los diferentes modos de que podrán colocarse, este número estará espresado por

$$9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=362880;$$

y suponiendo que cada cinco veces que se colocasen, lo hiciesen en un minuto, necesitarian 50 dias, 9 horas, y 36 minutos.

225 Si de las cosas que se dan para permutar fuesen dos iguales, el número de permutaciones se reduciria á la mitad, ó se deberia partir por $2=2\times1$: como se ve en ab y ba, pues si $a=b$ no hay mas que una aa ó bb. Si de las tres letras a,b,c, que dan seis

permutaciones, fuese $a=b$; no habria mas que las tres cbb, bcb, bbc, que es la mitad. Si hubiese tres letras iguales, el número de permutaciones se reduciria á la sesta parte, ó se deberia dividir por $6=3\times2\times1$: como se ve en las seis permutaciones que dan a,b,c; pues si $a=b=c$, se reducen á una sola aaa ó bbb ó ccc. Continuando del mismo modo se deducirá que si hubiese cuatro letras iguales, se deberia dividir el número de permutaciones por $4\times3\times2\times1$; y en general que si hubiese m letras iguales, se deberia dividir por
$m(m-1)(m-2)\ldots6\times5\times4\times3\times2\times1$.

226 En las combinaciones generalmente se pone por condicion, que no se repita ninguna, cuando se forman las de dos en dos, de tres en tres, &c. Así, si se toman para combinar las diez letras a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, de una en una, darán $10=\frac{10\times1}{1}$ combinaciones. Si se quieren combinar de dos en dos,
la a da las........9, ab, ac, $ad\ldots ak$,
la b daria otras 9, ba, bc, $bd\ldots bk$,
y cada una daria 9; de modo que el número total será 10×9; pero como ab y ba, no dan mas de una combinacion, y cada una se repetirá tambien dos veces, el número de combinaciones diferentes será $\frac{10\times9}{2}=45$.

Si las mismas letras se quieren combinar de tres en tres, cada dos darian ocho diferentes, cuyo total seria $10\times9\times8$; pero como cada seis no formarán mas de una combinacion diferente, se deberá partir dicho número por 2×3, y dará $\frac{10\times9\times8}{2\times3}=120$.

Del mismo modo se sacará que de cuatro en cuatro darán $\frac{10\times9\times8\times7}{2\times3\times4}=210$; y así sucesivamente.

Cor. Luego el jugador de lotería que acertase los cinco estractos, puede ganar

$$\frac{5\times4}{2}=10 \text{ ambos; y } \frac{5\times4\times3}{2\times3}=10 \text{ ternos.}$$

Proposiciones importantes acerca de las cantidades constantes y variables, y de los límites.

227 Teor. *Si una cantidad variable* X, *al paso que crece, se acerca á la constante* B, *la constante* B *será mayor que la variable* X.

Dem. Si no es $B>X$, será $B=X$, ó $B<X$. No puede ser $B=X$; porque entónces, si X crece se separa del valor de B; y si vuelve á crecer, se volverá á separar mas; y á cada paso que vaya creciendo, se irá separando del valor de B; lo cual no cumple con la circunstancia del teorema, que es aproximarse X á B al tiempo que crece; luego no puede ser $B=X$.

Tampoco puede ser menor; pues si $B<X$, al paso que X crezca, se diferenciará mas de B; y por lo mismo no cumple con la circunstancia de que X, al crecer, se acerque á B; luego no puede ser $B<X$; luego si B no puede ser igual ni menor que X, será $B>X$, que era L. Q. D. D.

228 Teor. *Si una cantidad variable* X, *al paso que mengua, se acerca á la constante* B, *esta* B *será menor que* X.

Dem. En efecto, si no es $B<X$, será igual ó mayor. Si es $B=X$, y X mengua, se diferenciará de B; y si vuelve á menguar, se diferenciará mas; y al paso que vaya menguando, se irá diferenciando mas de B; lo que no puede ser, pues la condicion del teorema exije que se vaya aproximando.

Tampoco puede ser $B>X$; pues al paso que X mengüe, se irá diferenciando mas de B, que tampoco cumple con lo enunciado. Luego si B no puede ser igual ni mayor que X, será $B<X$, que es L. Q. D. D.

229 Teor. *Si dadas dos cantidades desiguales, de*

la mayor se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, se llegará á un resultado que será menor que la otra cantidad, por pequeña que sea.

Espl. Sean B y K estas dos cantidades (esto es, B tan grande y K tan pequeña como se quiera); digo que si de la mayor B se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un residuo menor que la otra cantidad K, por pequeña que esta sea.

Dem. Multiplíquese K por un número n, tal, que el producto nK sea mayor que B, y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproximado al valor de B; y en este caso será $B<nK$.

Ahora, si estas cantidades son desiguales, tambien tendrán desiguales sus mitades, y será $\frac{B}{2}<\frac{nK}{2}$; pero si en vez de tomar la mitad de nK, se quita solamente K (que será igual con la mitad de nK solo cuando $n=2$, y en todos los demas casos será menor que la mitad de nK), con mayor razon quedarán desiguales; luego $\frac{1}{2}B<nK-K=(n-1)K$.

Si de estas cantidades desiguales quitamos la mitad, tambien quedarán desiguales; y si de la mayor quitamos ménos de la mitad (como será quitar K en el caso de que $(n-1)$ sea mayor que 2), con mas razon quedarán desiguales, y se tendrá $\frac{1}{4}B<(n-2)\,K$; y como siguiendo quitando á la menor la mitad, y á la mayor la cantidad K (que solo será igual con la mitad en el caso de que el múltiplo que reste de K sea el duplo) los resultados quedarán siempre desiguales: tendrémos que, al haber hecho un número de divisiones y restas, espresado por $n-1$, los resultados $\frac{B}{2^{n-1}}$ y $nK-(n-1)K=K$, quedarán desiguales, esto es, $\frac{B}{2^{n-1}}<K$;

luego *K* será mayor que el residuo que nos quede de haber quitado á *B* la mitad, y á lo que quede la mitad &c. que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí resulta que *si de dos cantidades desiguales de la mayor se quita mas de la mitad y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente, con mas razon podemos asegurar que lo que resulte, podrá llegar á ser menor que una cantidad dada, por pequeña que sea.*

Cor. 2.° Tambien resulta que *podemos concebir á toda variable un valor menor que cualquiera otra cantidad dada, por pequeña que sea.*

Porque se puede suponer que la ley de su variacion sea el irse haciendo sucesivamente dos veces ó mas de dos veces menor.

Cor. 3.° Y como un producto (61, 3.°) disminuye al paso que mengua uno cualquiera de sus factores, cuando se quiera hacerle menor que cualquier cantidad dada, *basta hacer á uno de los factores sucesivamente dos veces ó mas de dos veces menor.*

230 Teor. *Si la variable* X *se puede acercar á un mismo tiempo* (creciendo ó menguando) *tanto como se quiera á dos constantes* A, B, *dichas constantes serán iguales.*

Dem. Si no es $A=B$, será $A=B+K$; y entónces acercándose *X* á *A* tanto como se quiera no se podrá acercar á *B* al mismo tiempo, pues se acercaria á $B+K$, y lo impediria la cantidad *K*; y como por el supuesto se puede *X* acercar á *A* y *B* á un mismo tiempo tanto como se desee, resulta que no puede haber ninguna diferencia entre ellas; luego serán iguales. L. Q. D. D.

231 Teor. *Si dos variables* X, Z, *creciendo ó menguando, se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes* A, B, *la relacion de las constantes será la misma que la de las variables, y se tendrá* A:B::X:Z.

Espl. Esta proposicion tiene dos partes, á saber: cuando las variables crecen, y cuando menguan, ó

lo que es lo mismo: primero, cuando $A>X$, $B>Z$; y segundo, cuando $A<X$, $B<Z$.

Dem. 1.° Si no se verifica que $A:B::X:Z$, será $A:B>X:Z$, ó $A:B<X:Z$.

Si $A:B>X:Z$, podrémos hacer que crezca el antecedente X de la segunda razon lo suficiente, para que esta resulte igual con la primera; y suponiendo que sea X' dicho antecedente, se tendrá

$A:B::X':Z$ (m), siendo $X'>X$;

pero, por pequeña que sea la diferencia $X'-X$, todavía por el supuesto puede ser menor la diferencia $A-X$; luego será $A-X<X'-X$;

y como estas dos diferencias, desiguales, tienen el mismo consecuente, el antecedente de la primera (171 cor.) será menor que el de la segunda, y se tendrá $A<X'$.

Comparando estas dos cantidades con una misma B, cuando se compare la menor se tendrá (171 cor.) menor razon, y será $A:B<X':B$;

pero (prop. m.) $A:B::X':Z$;

luego, sustituyendo esta segunda razon en vez de la primera, se tendrá $X':Z<X':B$;

y como estas dos razones tienen un mismo antecedente, la menor tendrá (171 cor.) mayor consecuente, ó lo que es lo mismo, será $Z>B$, que es contra el supuesto; luego no puede ser $A:B>X:Z$.

Tampoco puede ser menor; porque si $A:B<X:Z$, podrémos hacer que crezca el consecuente Z de la segunda razon, para que mengüe esta y resulte igual con la primera; y representándole por Z', se tendrá

$A:B::X:Z'$ (n) y $Z'>Z$;

pero, por pequeña que sea la diferencia $Z'-Z$, puede ser aun menor la $B-Z$ por el supuesto; luego será

$B-Z<Z'-Z$, lo que da $B<Z'$.

Comparando ahora la cantidad A con estas dos, cuando se compare con la menor B, se tendrá mayor razon, esto es, $A:B>A:Z$.

pero (prop. n) $A:B::X:Z'$;

luego sustituyendo se tendrá $X:Z'>A:Z'$;

y como estas dos razones tienen un mismo consecuen-

te, la mayor tendrá mayor antecedente, y dará $X>A$, que tambien es contra el supuesto; luego si no puede ser $A:B>$ ni $<X:Z$, será $A:B::X:Z$, que era L. 1.° Q. D. D.

2.° En el caso de $A<X$ y $B<Z$, tendríamos que si no fuese $A:B::X:Z$, seria $A:B>$ ó $<X:Z$.

Supongamos en primer lugar que $A:B>X:Z$, en cuyo caso se hará $A:B::X:Z'$ (o), siendo $Z'<Z$; y discurriendo como ántes sacarémos $Z-B<Z-Z'$; de donde (171 cor.) sale $B>Z'$; comparando ahora la A con estas dos cantidades, dará $A:B<A:Z'$, y en virtud de la (prop. o), será $X:Z'<A:Z'$, que (171 cor.) da $X<A$, que es contra el supuesto; luego no puede ser $A:B>X:Z$.

Tampoco puede ser menor; porque si $A:B<X:Z$, se podrá hacer $A:B::X':Z$ (p), siendo $X'<X$; y siguiendo el raciocinio del caso anterior se deducirá que $X-A<X-X'$, lo que nos dará $A>X'$; y comparando con una misma cantidad B, se tendrá

$$A:B>X':B, \text{ ó (prop. p.) } X':Z>X':B,$$

de donde resulta $Z<B$, que tambien es contra el supuesto; luego si no puede ser $A:B>$ ni $<X:Z$, será $A:B::X:Z$, que es L. Q. D. D.

Cor. De aquí resulta que *si la segunda razon fuese de igualdad, la primera tambien lo sería*; ó lo que es lo mismo, *si las variaciones de* X *y* Z *fuesen tales que en todos los casos se tuviese* X=Z, *se tendria* A=B, *ó las constantes serian iguales.*

Esc. 1.° El caso de $A>X$ y $B<Z$ no tiene lugar; porque cuatro cantidades de esta especie, comparadas ordenadamente, jamas pueden formar proporcion.

Esc. 2.° Los principiantes deben procurar familiarizarse mucho con el lenguaje de la demostracion anterior; pues en lo sucesivo solo pondrémos las desproporciones y consecuencias que de ellas resulten.

Esc. 3.° *Si dos cantidades variables* X, Z, *se pueden acercar á un mismo tiempo respectivamente á dos constantes* A *y* B, *tanto como se quiera, el producto* X Z *de las dos primeras, se podrá acercar tan-*

to como se quiera al producto AB *de las dos últimas* (*).

Espl. Esta proposicion comprende tres casos: 1.° cando $X < A$ y $Z < B$; 2.° cuando $X > A$ y $Z > B$; y 3.° cuando $X > A$ y $Z < B$, ó al contrario $X < A$ y $Z > B$: voy á demostrar que en todos

---

(*) *Como esta proposicion se ha tomado por evidente, no siéndolo en realidad, haré aquí algunas reflexiones que me parecen de importancia.*

Tanto por los prólogos de mis obras, como por todos aquellos parages de ellas, en que se habla de los axiomas, he manifestado constantemente lo mucho que se ha abusado de ellos, con perjuicio notable de la instruccion, y son bien notorios tambien mis no interrumpidos esfuerzos para demostrarlos, sin tomar como verdaderos axiomas, si no aquellos que en efecto lo son, y están reconocidos como tales por los mejores metafísicos; y son únicamente los que resultan del principio de identidad, de que una cosa es igual á ella misma. *Pero cuando yo me lisongeaba de no haber incurrido en la falta de haber tomado por axioma ninguna otra proposicion, que careciese de dicha circunstancia, y de que habia demostrado todas aquellas que se han tomado y se toman aun como evidentes por los matemáticos, y que segun mi modo de ver, y el de los mas famosos metafísicos no lo son, hé aquí que un discípulo á quien yo esplicaba la Geometría, me ha hecho ciertas reflexiones, por las cuales vine en conocimiento de que la proposicion del testo no tenia el grado de evidencia que se le suponia: pues que las mismas razones que yo quise dar para disipar dichas dudas, me dieron á conocer la necesidad de demostrarla.*

En efecto, supongamos que X *y* Z *sean las dos cantidades variables que se puedan acercar respectivamente á* A *y* B, *que se suponen constantes todo lo que se quiera; no es tan evidente como se ha supuesto hasta ahora en todas las obras y aun en las mias, á pesar de mi decidida repugnancia á tomar por axiomas pro-*

estos casos se tendrá que la diferencia entre los productos $A.B$, y $X.Z$ podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que pueda ser esta cantidad.

Dem. 1.° Supongamos que $X < A$, $Z < B$; y que en un estado cualquiera de la cuestion sea α

---

posiciones que no lo son, el que el producto X. Z *se puede acercar al producto* A.B *tanto como se quiera, porque suponiendo las mismas condiciones espresadas, y que se tenga el primer caso que ofrece dicha proposicion, á saber: que* $X < A$ *y* $Z < B$, *el producto* X.Z *será menor que* X.B; *y* X.B *siempre será menor que* A.B; *luego, pues que entre el producto* X.Z *y el* A.B, *ha de haber siempre una cantidad intermedia* X.B, *resulta que hay mas motivos para inferir que la proposicion es falsa, que no para tomarla por axioma, como se hace en todos los libros de Matemáticas al demostrar las proposiciones que citamos.*

Lo mismo se verifica en el 2.° *caso de ser* $X > A$ *y* $Z > B$; *pues* X.Z *será mayor que* A.Z, *y* $A.Z > A.B$; *luego tambien hay aquí una cantidad* A.Z *intermedia entre* X.Z *y* A.B.

Las primeras tentativas que yo hice para disipar dichas dudas no cooperaron mucho para comprobar la evidencia de la espresada proposicion. En efecto, yo quise hacer una comprobacion numérica, y supuse que se tuviese $A=100$, *y* $B=1000$, $X=99$, *y* $Z=999$; *es decir, valores que se separan el de* X *en una centésima parte del valor de* A, *y el de* Z *en una milésima del de* B; *y sin embargo resulta que en este caso la diferencia entre los productos* X.Z *y* A.B, *es nada ménos que* 1099, *que es de mucha consideracion. Suponiendo* $X=99{,}9$, $Z=999{,}9$, *conservando* A *y* B *los mismos valores de ántes, resulta la diferencia de* 109,99 *que tambien es considerable, y suponiendo los mismos valores á* A *y* B, *y que* $X=99{,}99$, $Z=999{,}99$, *todavía resulta una diferencia de* 10,9999.

Convencido ya de que no se podia tomar por evi-

el esceso de A sobre X, y β el de B sobre Z: lo cual nos dará $A=X+\alpha$ (1), $B=Z+\beta$ (2).

Multiplicando estas ecuaciones y pasando el primer término XZ del segundo miembro al primero, se tiene $A.B-X.Z=\alpha Z+\beta X+\alpha\beta$ (3). Y todo está reducido á probar que, por la naturaleza de la cues-

---

dente dicha proposicion, traté de demostrarla; y en las investigaciones que hice ántes de hallar la demostracion del testo, encontré nuevos fundamentos para no deberla reconocer como evidente. En efecto, yo traté de probar que el segundo miembro de la (ec. 3) se hacia dos veces menor, suponiendo que la diferencia entre cada variable y su constante respectiva se hiciese dos veces menor; pero encontré que no por esto dicho segundo miembro se hacia dos veces menor, y que por consiguiente no disminuiria bastante para poderse comprender en la proposicion (§ 229).

Supuse despues que la segunda variacion que sobreviniese á las variables, fuese el reducirse su diferencia á la tercera parte de lo que era ántes, y obtuve el siguiente resultado $\frac{1}{3}\alpha Z+\frac{1}{3}\beta Z+\frac{5}{9}\alpha\beta$: *donde vemos que cada uno de los dos primeros términos es menor que la mitad de su correspondiente en el segundo miembro de la espresada (ec. 3); pero que el tercero es mas de la mitad, y por consiguiente no se puede deducir en general si esta espresion será ó no la mitad de la (ec. 3).*

Para disminuir desde luego el número de tentativas, supuse en general, que la segunda variacion de X y Z, fuese el convertirse en

$$A=X'+\frac{n}{2^n+1}.\alpha,\ B=Z'+\frac{n}{2^n+1}.\beta,$$ *esto es, que en general las diferencias fuesen mas de dos veces menores que las primitivas* α *y* β, *y me propuse determinar el valor que deberia tener* n *para que la diferencia de los productos fuese mas de dos veces menor que el segundo miembro de la (ec. 3); y obtuve, que* n *debia ser igual con* $\sqrt{\frac{1}{2}}$, *lo que daba para las diferencias en-*

tion, el segundo miembro de esta ecuacion puede llegar á ser tan pequeño como se quiera.

No se puede tomar por evidente el que, pudiendo disminuir α y β todo lo que se desee, cada uno de los términos de que se compone dicha espresion disminuirá lo que se quiera; pues, aunque es cierto

---

tre X y A, y Z y B, los valores $\frac{1}{3,5}\alpha$, $\frac{1}{3,5}\beta$, *y este dato es el que me ha servido de fundamento para suponer en el testo que dichas diferencias se fuesen reduciendo á cada operacion á la cuarta parte, y quedase demostrada la proposicion. Despues, he referido á ella las proposiciones en que se demuestra* (418) que la diferencia entre la superficie de la pirámide inscrita en el cono, y la de la circunscrita puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y (431) que la diferencia entre la superficie del cuerpo circunscrito y la del cuerpo inscrito en una esfera, es menor que cualquier cantidad dada: *y tambien el que* á toda esfera (434) se le puede inscribir y circunscribir dos cuerpos, tales que la diferencia entre sus volúmenes sea menor que cualquier cantidad dada. *Con lo cual, quedan demostradas estas tres proposiciones con todo el rigor geométrico, y que por los métodos con que se han demostrado hasta el dia se hallan sin apoyo alguno.*

Esto nos da á conocer lo muy circunspectos que debemos ser en tomar por conocidas, cosas que no lo son, y aun en hacer ciertas hipótesis aventuradas, que despues se reconocen inexactas: así es, que ahora se acaba de reconocer por los importantés trabajos de M. M. Poisson y Cauchy, que es falsa la suposicion que hizo Lagrange, de que en la oscilacion de las ondas, el movimiento solo se estendia á capas muy cerca de la superficie: y del mismo modo se echará de ver que en algunos otros puestos se hacen hipótesis arbitrarias ó se viene á suponer lo mismo que se busca.

que α y β pueden disminuir indefinidamente por la naturaleza de la cuestion, resulta que en el mismo caso aumentan X y Z, por la dependencia que tienen en virtud de la relacion que espresan las ecuaciones (1 y 2): luego los dos primeros términos son de tal naturaleza que cuando uno de los factores disminuye, aumenta el otro, y por consiguiente nada se puede establecer, en general, acerca de su decremento ó incremento: por lo cual, es indispensable manifestar, que por las condiciones que se prefijan, se ha de llegar á verificar que la diferencia que espresa la (ec. 3), podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, que es lo que voy á ejecutar, fundándome en la proposicion demostrada (229).

Con este objeto, observaré que, pues X siendo variable, se puede acercar á A tanto como se quiera, y lo mismo Z á B, se podrá suponer que la variacion que sobrevenga á X, despues del estado que suponen las (ec. 1 y 2), sea el de convertirse X en X', de modo que le falte $\frac{1}{4}\alpha$ para convertirse en A, y que sucediendo una cosa análoga á Z, se tenga $A=X'+\frac{1}{4}\alpha$ (4), $B=Z'+\frac{1}{4}\beta$ (5). Formando el producto, y pasando el término $X'.Z'$ al primer miembro, se tendrá $A.B-X'.Z'=\frac{1}{4}\alpha Z'+\frac{1}{4}\beta X'+\frac{1}{16}\alpha\beta$ (6). Igualando los dos valores de A, (ecs. 1 y 4), y los dos de B (ecs. 2 y 5), se tiene
$X+\alpha=X'+\frac{1}{4}\alpha$ (7), $Z+\beta=Z'+\frac{1}{4}\beta$ (8),
que dan $X'=X+\frac{3}{4}\alpha$ (9), $Z'=Z+\frac{3}{4}\beta$ (10).

Sustituyendo estos valores en el segundo miembro de la (ec. 6.), resulta
$A.B-X'.Z'=\frac{1}{4}\alpha Z+\frac{1}{4}\beta X=\frac{7}{16}\alpha\beta$ (11). Comparando el segundo miembro de esta espresion con el de la (ec. 3), resulta que el primer término $\frac{1}{4}\alpha Z$, siendo la cuarta parte del primero αZ, es mas de dos veces menor que él; lo mismo sucede al $\frac{1}{4}\beta.X$ respecto del $\beta.X$; y como tambien se verifica que $\frac{7}{16}\alpha\beta$ es mas de dos veces menor que el tercer término $\alpha\beta$ de la espresion (3), resulta que cada uno de los tres términos

del segundo miembro de la (ec. 11) es mas de dos veces menor que su correspondiente en la (ec. 3); y por consiguiente todo el segundo miembro de la (ec. 11) será mas de dos veces menor que todo el segundo miembro de la (ec. 3), y como lo mismo sucede á los primeros miembros, tendrémos que $A.B-X'.Z'$ es mas de dos veces menor que $A.B-X.Z$; y como raciocinando del mismo modo, obtendriamos espresiones $A.B-X''.Z''$, $A.B-X'''.Z'''$, &c., que á cada paso fuesen siendo cada una mas de dos veces menor, resulta que, al cabo de cierto tiempo (229 cor. 1.°), se llegará á tener una que sea menor que cualquier cantidad dada; que era L. 1.° Q. D. D.

2.° Supongamos ahora que sea $X > A$, $Z > B$; voy á demostrar que tambien se verifica, que la diferencia entre el producto $X.Z$ y $A.B$, podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

En efecto, supongamos que en un estado cualquiera de la cuestion, se tenga $X=A+\alpha$ (12), y $Z=B+\beta$ (13); formando el producto, y pasando al primer miembro el término $A.B$, será $X.Z-A.B=\alpha B+\beta A+\alpha\beta$ (14).

Aquí ya la demostracion es mas sencilla; pues como A y B son constantes suponiendo que α y β se hagan solo dos veces ó mas de dos veces menores, los términos αB y βA se hacen cada uno dos veces menor; y como el $\alpha\beta$ se hará en este mismo caso cuatro veces menor queda demostrado, que el segundo miembro de la (ec. 14) se hace mas de dos veces menor: luego al cabo de cierto tiempo (229 cor. 1.°) llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, que era L. 2.° Q. D. D.

3.° Supongamos ahora que $X > A$ y $B < Z$, y tendrémos por ejemplo,
$A=X+\alpha$ (15) y $B=Z-\beta$ (16); lo que nos dará

$$A.B-X.Z=\alpha Z-\beta X-\alpha\beta \text{ (17)}.$$

Aquí no se puede asegurar nada en general sobre si el producto $A.B$ será mayor ó menor que $X.Z$;

pero lo que sí sabemos es que dicho segundo miembro, ha de ser menor que el segundo de la (ec. 3) que consta de los mismos términos pero todos positivos; y como hemos demostrado (1.°) que el segundo miembro de la (ec. 3.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, con mas razon lo podrá llegar á ser el de la (ec. 17) que es menor; y como lo mismo demostrariamos del caso en que $X > A$, y $B > Z$, resulta L 3.° Q. D. D.

Esc. 4.° Hemos supuesto en la proposicion anterior que A y B eran cantidades constantes; pero si una de ellas ó las dos fuesen tambien variables, tales que al variar, se fuesen acercando á los valores de las otras dos X, Z, con mas razon se verificaria la proposicion: por lo cual se puede establecer en general, que *si cuatro cantidades son tales que dos de ellas se pueden acercar respectivamente al valor de las otras dos á un mismo tiempo tanto como se quiera, el producto de las dos primeras se podrá acercar tanto como se quiera al producto de las otras dos.*

232 Cuando una cantidad variable se puede acercar á otra constante tanto como se quiera, de manera que la diferencia entre ellas pueda llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, pero sin que jamas puedan llegar á ser iguales, se llama á la constante *límite* de la variable.

En la idea de límite están comprendidas esencialmente dos: la primera que la cantidad se pueda acercar al límite tanto como se quiera; y la segunda que jamas pueda llegar á serle igual.

Por esta causa A y B (§ 230) son el límite de X; y aquella proposicion quiere decir, que *si dos cantidades son límite de una tercera, son iguales entre sí.* Igualmente (§ 231) A es el límite de X y B el de Z; y dicha proposicion quiere decir, que *si dos variables al crecer ó menguar, se acercan respectivamente á sus límites, la relacion de estos es la misma que la de las variables.*

Igualmente, la proposicion del (esc. 3.° § 231)

quiere decir: que *si dos variables se acercan respectivamente á sus límites, el producto de dichas cantidades se acerca tambien al producto de sus límites.*

233 *Toda cantidad variable tiene dos límites: uno verdadero que es o; y otro que es un límite considerado y se representa por* $\frac{1}{0}$.

En efecto, si x es dicha variable, y á cada variacion se va convirtiendo en ser la mitad ó menor que la mitad, al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea; y por lo mismo la diferencia entre x y o podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada. Por otra parte, x jamas llegará á ser cero, miéntras permanezca cantidad, luego el o tiene las dos circunstancias esenciales al límite, y por lo mismo *es el límite de las cantidades que decrecen.*

Ahora, si en la espresion $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$, la x va disminuyendo, $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$ irá aumentando; y como x puede disminuir tanto como se desee, resulta que $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$, podrá llegar á ser mayor que toda cantidad asignable; pero x al disminuir, se va acercando continuamente á su límite o, luego la espresion $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$ se irá acercando continuamente á $\frac{a}{0}$ ó $\frac{1}{0}$; que *es el límite de las cantidades que crecen.*

Esc. Este límite no es verdadero; porque no contiene la segunda propiedad del límite; en efecto, no se puede suponer que siendo Z una variable, que va creciendo, le falta para llegar á ser $\frac{1}{0}$ la cantidad K; porque entónces añadiendo á Z la K,

deberia ser $Z+K=\frac{1}{0}$, y por consiguiente $\frac{1}{0}$ no podria esceder de $Z+K$, que es contra el supuesto de que $\frac{1}{0}$ puede ser mayor que toda cantidad dada, por grande que sea.

234 A la espresion $\frac{1}{0}$ se le suele dar el nombre de *infinito*, y se señala con este signo ∞; de manera que $\frac{1}{0}$ é ∞ representan una misma cosa.

Puesto que $\frac{1}{0}=\infty$, si quitamos el divisor será

$1=0\times\infty$; y dividiendo por ∞, será $\frac{1}{\infty}=0$; lo que

suministra otro medio de representar el cero, límite de las cantidades que decrecen.

235 La espresion $1=0\times\infty$, ó $a=0\times\infty$, da á conocer *que una cantidad cualquiera se puede suponer representada por cero multiplicado por el infinito.*

Si en vez de ∞ ponemos su valor $\frac{a}{0}$ ó $\frac{1}{0}$, será

$$a=0\times\frac{a}{0}=\frac{a\times 0}{0}=\frac{0}{0};$$

y si en vez de 0 sustituimos $\frac{1}{\infty}$; será

$$a=0\times\infty=\frac{1}{\infty}\times\infty=\frac{\infty}{\infty};$$

donde se ve que tambien es símbolo de una cantidad

cualquiera la espresion $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

236 Todos estos símbolos sirven para indicarnos, cuando las circunstancias con que tratamos de determinar una cantidad, son insuficientes para este objeto, por convenir á cualquier cantidad en general. V. g. esta cuestion.

Un hombre, á quien se pregunta cuánto dinero tiene, responde: si al triplo de mi dinero añado 5 duros, tengo dos veces la séptima parte de 21, mas cinco octavas partes de veinticuatro veces mi dinero par-

tido por cinco, menos un duro. Cuánto dinero tenia?

Res. Llamando x á dicho número, tendré planteado el problema en la siguiénte ecuacion:

$$3x+5=\frac{2}{7}\times 21+\frac{5}{8}\times\frac{24x}{5}-1;$$

que practicando lo dicho (150), tendré

$$3x-\tfrac{5}{8}\times\frac{24x}{5}=\tfrac{2}{7}\times 21-5-1, \text{ ó } x(3-\tfrac{5}{8}\times\tfrac{24}{5})=\tfrac{2}{7}\times 21-5-1$$

$$\text{que da } x=\frac{\tfrac{2}{7}\times 21-5-1}{3-\tfrac{5}{8}\times\tfrac{24}{5}}=\frac{\tfrac{42}{7}-5-1}{3-\tfrac{120}{40}}=\frac{6-5-1}{3-3}=\frac{0}{0}.$$

Lo que manifiesta que la cantidad x puede tener un valor cualquiera. Para que no se estrañe este resultado, se ejecutarán las operaciones indicadas en el segundo miembro de la ecuacion, y se tendrá

$$3x+5=\tfrac{42}{7}+\tfrac{120}{40}x-1=6+3x-1=3x+5;$$

que quiere decir que el triplo de dicho número mas *cinco*; es igual con el mismo triplo mas *cinco*. Y como cualquier cantidad es igual con ella misma, resulta que toda ecuacion en que los dos miembros estén representados por una misma cantidad, no puede servir para determinarla; y por lo mismo el cálculo debe indicar en el último resultado, que cualquier cantidad cumple con la circunstancia exijida.

Esc. Esta clase de ecuaciones se llaman *idénticas*; y aunque las espresiones que se reducen á $\frac{0}{0}$ pueden tener en general un valor cualquiera, hay casos particulares en que no tienen mas de uno solo y determinado, como verémos á su tiempo.

GEOMETRIA.

PARTE PRIMERA.

Nociones preliminares.

237 *Geometría* es la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la estension, en cuanto terminada ó figurada. De consiguiente, entre todas las propiedades de los cuerpos que hemos dado á conocer (intr.), la Geometria solo considera la *estension* y la *figurabilidad*.

Para adquirir una idea exacta de la estension, se observará que un cuerpo cualquiera, v. g. un libro, en cualquier parage que esté, ocupa una parte del espacio; y quitado de allí, la parte del espacio se quedará donde estaba, la cual es la *estension* del libro.

Donde se ve que el objeto de la Geometría no es la estension impenetrable del cuerpo, sino la parte del espacio que ocupa, en donde se pueden ir colocando sucesivamente otros diferentes cuerpos.

Todo cuerpo es estenso en tres sentidos diferentes que se llaman *dimensiones*, cada una de estas tiene su nombre particular, relativo al modo con que se considera el cuerpo. Así, la dimension que al mirar un cuerpo es la mas larga, se llama *longitud*; la que constituye lo ancho del cuerpo, se llama *latitud*; y la que constituye el grueso, altura ó profundidad, se llama *profundidad* ó *grueso*. Así, en el libro (fig. 1) visto de plano, lo que hay desde A á B es la longitud; lo que hay desde B á D la latitud; y lo que hay desde B á G su grueso; pero si se mira el libro de canto, por la parte DFGB, entonces se llamará longitud á la DB, latitud á la BG; y profundidad á la AB, que ántes era la longitud.

238 La estension de un cuerpo se llama tambien *volúmen* ó *cuerpo geométrico*; y aunque para constituirla son indispensables las tres dimensiones, ó por mejor decir, aunque en la estension de todo cuerpo existen simultáneamente las tres dimensiones, sin embargo por medio de la abstraccion podemos prescindir de una, de dos, y aun de las tres. Así, prescindiendo del grueso BG, queda sola la estension con las dos dimensiones, longitud AB, y latitud BD, que es lo que se llama *superficie*.

Si en esta prescindimos de la latitud BD, queda la idea de estension en sola longitud, que se llama *línea*; y si ahora prescindimos de esta longitud, no quedará absolutamente nada de la estension; y á esta idea que resulta, se le llama *punto matemático*. De modo que así como para formarnos idea de la *nada* ó de *cero*, es necesario prescindir de toda cantidad, igualmente para formarse una idea cabal del punto, es necesario prescindir de toda estension; por manera que *punto matemático*, y *cero* ó *carencia de toda estension*, es una misma cosa.

239 De todo lo dicho resulta: 1.° que *la superficie no tiene nada de grueso y que es el límite de los cuerpos*; pues para formarnos su idea prescindimos de él; pero si en vez de prescindir de una vez, suponemos que va disminuyendo poco á poco, el cuerpo se irá acercando á la superficie, sin que jamas pueda confundirse con ella, hasta que el grueso se reduzca á cero, esto es, hasta que no haya cuerpo, que son las dos circunstancias del límite (232).

2.° Que *la línea no tiene nada de grueso ni de ancho, y por lo mismo, es el límite de la superficie.*

3.° Que *el punto no tiene ninguna dimension*, y *es el límite de la línea, y de toda estension.*

240 La línea se divide en *recta* y *curva*; línea recta es *la que tiene todos sus puntos en una misma direccion*, esto es, aquella que está dispuesta de tal manera, que colocándose en uno de sus estremos,

quedan ocultos todos sus puntos intermedios, como sucede en las alamedas puestas á cordel, y con los guias de un regimiento cuando están alineados; tales son las que queremos representar por las AB, BD, CD, &c.

Curva es *aquella cuyos puntos no están todos en una misma direccion*, como la DF, BG, &c.

241 La superficie se divide en *plana* y *curva*; se llama plana, *aquella cuyos puntos están todos tan altos los unos como los otros*, como la ABDC; y curva *aquella cuyos puntos no están todos tan altos los unos como los otros*, como la CDFE. Ademas, las superficies y líneas curvas, pueden ser *cóncavas y convexas*: las cuales toman estas denominaciones: segun el aspecto bájo que se miran.

242 La Geometría tiene tres partes: la primera trata de las líneas; la segunda de las superficies; y la tercera de los volúmenes.

En la primera parte se supone que todas las líneas están trazadas sobre un *plano matemático*; que es una superficie plana (241) que concebimos sin límites; y con tal perfeccion cual no existe en la naturaleza.

243 *Una recta queda determinada, en fijando dos de sus puntos.* Porque la esencia de la línea recta, es que todos sus puntos estén en una misma direccion; y como en la idea de direccion sólo entra la del punto ó paraje A (fig. 2), de donde se parte, y la del punto ó sitio B á que uno se dirije, se sigue que los puntos intermedios deben quedar cubiertos por los estremos A y B; y los que se supongan á la izquierda de A le deben cubrir, como igualmente los que se supongan á la derecha de B, deben quedar cubiertos por él. Pero este conocimiento ha provenido sólo de los dos puntos A y B; luego *dos puntos determinan la posicion de una recta.*

244 *Un punto no es suficiente*; porque desde un punto O se puede ir á todas partes; y en el mismo punto O pueden concurrir todas las direcciones que se quieran.

Cor. 1.° *Desde un punto A á otro B (fig. 3) no se puede tirar mas de una línea recta; pero sí infinitas curvas.* Porque si se pudiese tirar mas de una recta, no bastarian dos puntos para fijar su posicion; pero no yendo en línea recta, se podrá ir por ACB, ó por ADB, ó por AEB &c.

Cor. 2.° *La distancia entre dos puntos se debe medir por una recta*; porque es la única que se puede tirar de su especie.

Cor. 3.° *Dos rectas no pueden encontrarse mas que en un punto*; porque si se encontrasen en dos, se confundirian en una sola; y de consiguiente no habria dos rectas, que es contra el supuesto.

245 Por suponerse las rectas tiradas en un mismo plano, y no tener este límites, inferimos que cuando se necesite, se podrán concebir prolongadas ó acortadas las líneas; y que en siendo rectas se podrán *superponer*, de manera que se confundan en un todo si son iguales; ó en aquella parte que tengan de comun; y recíprocamente, *si al superponer dos rectas se confunden sus estremos, se habrán confundido en toda su longitud, y de consiguiente serán iguales.*

Esc. Se dice que dos líneas tienen una *comun medida*, ó que son *comensurables*, cuando ambas contienen á una tercera de su misma especie un número exacto de veces.

246 Entre la infinidad de curvas que puede concebir nuestra imaginacion, la Geometría elemental sólo considera *la circunferencia de círculo*, que es *una línea curva reentrante, cuyos puntos distan todos igualmente de uno que se llama centro*: tal es (fig. 4) la AEBD, cuyo centro es C. El espacio ó superficie que encierra la circunferencia, se llama *círculo*. Las rectas CA, CE, &c. que desde el centro van á parar á la circunferencia, se llaman *radios*; los cuales son todos iguales, por medir (244 cor. 2.°) la distancia de la circunferencia al centro, y ser dicha distancia una misma en todos los puntos.

Toda línea DCE, que pasando por el centro termina con sus estremos en la circunferencia, se llama *diámetro*; por consiguiente *el diámetro es igual á dos radios ó al duplo de uno*; y como todos los radios son iguales, *tambien lo serán los diámetros.*

Esc. Para tirar rectas y describir circunferencias, se emplea la *regla* y el *compas*, cuya construccion y uso se entiende fácilmente con la esplicacion del Profesor.

247 Se llama *arco* una porcion cualquiera de la circunferencia; así, la parte BFD es un arco, y la parte DAEB es otro arco; toda recta BD que desde un estremo de un arco va á parar al otro, se llama *cuerda* del arco; y se llama *sajita* del mismo arco, á la parte FG del radio FC, interceptada entre el punto medio de dicho arco y la cuerda. Se llama *sector* de círculo, al espacio CBFD, comprendido por dos radios y un arco; y se llama *segmento*, al espacio comprendido entre una cuerda y su arco, tal es el BDF. Siempre que se hable de arcos ó cuerdas, se entiende de los menores.

Cuando dos circunferencias ABD, *abd* (fig. 5), tienen un mismo centro C, se dice que son *concéntricas*; y cuando tienen diferentes centros, se llaman *escéntricas*.

El espacio ABD*dba*, comprendido entre dos circunferencias concéntricas, se llama *corona* ó *ánulo*.

248 Teor. *Dos circunferencias concéntricas no se pueden encontrar sin confundirse en una sola.*

Dem. Porque ó sus radios son iguales ó desiguales: si son iguales, todos los puntos de la una se confundirán exactamente con los de la otra, y por lo mismo se habrán confundido en una sola. Si los radios son desiguales, la que tenga menor radio estará toda dentro de la otra, habiendo siempre entre ellas una distancia igual á la diferencia de los radios. Luego *dos circunferencias*, &c.

Cor. De donde se deduce que *si dos circunferencias tienen un mismo radio serán iguales; y colocada*

la una sobre la otra, de manera que se confundan sus centros, se confundirán todas ellas.

249 Teor. *El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales.*

Espl. Si el círculo ABDE (fig. 6); digo que si se dobla por el diámetro AD, la parte AED caerá exactamente sobre la ABD; y habiéndose confundido serán iguales.

Dem. Si la parte AED no cae sobre ABD, caerá ó por mas arriba ó por mas abajo. Si cayese por mas arriba, y estuviese representada por AND, tirando la NC, esta seria un radio del círculo, y por consiguiente igual con BC, radio tambien del mismo círculo; lo que es absurdo, por ser NC todo y BC parte suya; luego no se puede suponer que caiga por mas arriba. Si cae por mas abajo, y se representa por AMD, tirando la MC, será un radio del círculo, y por consiguiente igual con BC, lo que tambien es imposible; luego no puede caer por mas abajo. Luego si no puede caer ni por mas arriba ni por mas abajo, se habrán confundido y serán iguales. L. Q. D. D.

250 Cuando dos líneas AB, AC (fig. 7) se encuentran en un punto A, se llama *ángulo* á la abertura ó inclinacion que tienen entre sí; el punto A donde se encuentran, se llama *vértice*; y se llaman *lados* las dos líneas AB, AC, que le forman.

Cuando un ángulo está solo, se enuncia nombrando la letra del vértice; pero cuando en un mismo punto se forman varios ángulos, se leen las tres letras, pronunciando siempre en medio la del vértice; así, el de la (fig. 7) se leerá BAC ó CAB.

Es mas sencillo aun poner una letra minúscula dentro del vértice y pronunciarla sola; así, el mismo ángulo se leerá con mas sencillez *el ángulo* n.

Si se prolonga la CA hasta D, la AB formará con la parte prolongada AD el ángulo BAD ó *m*, cuyos dos ángulos BAC, BAD ó *n*, *m*, se llaman ángulos *contiguos* ó *adyacentes*.

Como, ya se prolonguen ó acorten las líneas AB, AC, su direccion no se altera (245), resulta que la inclinacion que tienen entre sí no varía; por lo que *la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados, sinó de su inclinacion.*

Cuando los lados del ángulo son líneas rectas, se llama *rectilíneo* ó ángulo *plano*; cuando curvas, *curvilíneo*, como DAC (fig. 3); y cuando uno de los lados es una línea recta, y el otro una curva, se llama *mistilíneo*, tal es el CAB.

251 Teor. *Dos ángulos iguales se pueden superponer de modo que se confundan.*

Espl. Si el ángulo bac=BAC (fig. 8), y se coloca el uno sobre el otro, de manera que el vértice a caiga sobre el A, y ac sobre AC, digo que ab caerá sobre AB, y quedarán confundidos en uno solo.

Dem. Si esto no se verifica, la ab caerá por mas arriba de la AB, ó por mas abajo. Si cae por mas arriba y toma la direccion AN, se tendrá que bac estará representado por NAC, ó será igual con él; y como por el supuesto bac=BAC, será (intr. ax. 5.°) NAC=BAC, lo que es absurdo: pues NAC es todo y BAC parte suya; luego la ab no puede caer por mas arriba de AB.

Si cae por mas abajo, y se representa por AM, se tendrá MAC = bac; y como por el supuesto BAC=bac, será MAC=BAC; lo cual siendo tambien absurdo, por ser MAC parte y BAC todo, manifiesta que no puede caer por mas abajo. Luego se confundirán. L. Q. D. D.

Esc. Recíprocamente, *si dos ángulos son tales que, puesto el uno sobre el otro, se confunden exactamente, serán iguales*; pues para formarnos la idea de la igualdad ó desigualdad de dos cosas, siempre recurrimos á la superposicion. Ademas, advertimos que siempre que digamos de dos cosas, que son *iguales* han de ser tales que se puedan superponer, como sucede con un duro que se puede superponer á otro duro, y no se ve mas de uno; y cuando una

cosa valga tanto como otra, pero que puesta la una sobre la otra no se ajusten exactamente, como sucede con un duro y dos medios duros ó cinco pesetas, las llamarémos *equivalentes*.

252 Cuando una línea DC (fig. 9) forma con otra AB los dos ángulos adyacentes DCA, DCB, iguales entre sí, cada uno de dichos ángulos se llama *recto*, y la línea DC *perpendicular* á la AB; de manera que una línea es perpendicular á otra *cuando forma con ella dos ángulos iguales*; ó *cuando cae sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro*.

Todo ángulo BCK, menor que uno recto, se llama *agudo*; todo ángulo ACK, mayor que uno recto, se llama *obtuso*; y se llaman *ángulos opuestos al vértice* los que tienen sus vértices opuestos, como AOD y COB (fig. 13), y AOC y DOB.

Toda línea CK)fig. 9) que forma con otra dos ángulos desiguales, se llama *oblicua* respecto de ella.

253 Teor. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

Espl. Sea DC perpendicular á AB, lo que supone (252) que los ángulos DCA, DCB, son rectos é iguales entre sí; y sea HG perpendicular á EF, lo que tambien supone que los ángulos HGE, HGF, son rectos é iguales entre sí; pues voy á demostrar que estos últimos son iguales con los primeros.

Construccion. Tómese AC=EG, CB=GF, y se tendrá AB=EF; colóquese la EF sobre la AB, de modo que se confundan sus estremos, en cuyo caso el punto G, estremo de EG, caerá sobre el punto C, estremo de su igual AC; y digo que la línea GH caerá sobre la CD.

Dem. Porque si esto no se verifica, el lado GH caerá fuera del CD; si suponemos que tenga la direccion CK, se tendrá ACK=KCB, por ser estos ángulos los que representan á los EGH, HGF, iguales por el supuesto; pero esto es un absurdo, porque siendo tambien por el supuesto ACD=DCB, no se puede verificar que ACK que es mayor que

ACD, sea igual con KCB que es menor que DCB, ó que su igual ACD; luego no se puede suponer que la GH caiga fuera de la CD; luego caerá encima, y se confundirá EGH con ACD, y HGF con DCB; luego se tendrá EGH=ACD y FGH=BCD, que era L. Q. D. D.

254 Teor. *Los dos ángulos juntos que forma una línea al caer sobre otra, valen dos ángulos rectos.*

Espl. Si KC cae sobre AB de un modo cualquiera, digo que la suma de los dos ángulos ACK, KCB, contiguos que forma con ella, equivalen á dos rectos.

Dem. Concíbase la perpendicular CD, y tendrémos que los dos ángulos ACD, DCB serán rectos; y como ACK=ACD+DCK, se tendrá ACK+KCB=ACD+DCK+KCB; pero DCK+KCB componen el ángulo recto DCB; luego resultará ACK+KCB=ACD+DCB=2 rectos $=\pi$, que era L. Q. D. D.

Esc. De aquí en adelante llamarémos π á la suma de dos ángulos rectos, y por consiguiente $\frac{1}{2}\pi$ al ángulo recto.

Cor. 1.° *Si uno de los ángulos ACK ó KCB es recto, lo será igualmente el otro*; porque entre los dos han de valer dos rectos.

Cor. 2.° *Si una línea CD* (fig. 10) *es perpendicular á otra AB, esta AB lo será á la primera CD.* Porque como la CD es perpendicular á AB, se tiene AEC=CEB por rectos; y como de ser el AEC recto, se deduce que su adyacente AED tambien lo ha de ser, resulta que la AE es perpendicular (252) á la CD.

De ser recto el ángulo CEB, se deduce que su contiguo BED lo ha de ser; luego *cuando dos perpendiculares se cruzan, forman cuatro ángulos rectos.*

Cor. 3.° *Todos los ángulos ACF, FCD, DCE, ECB, que se forman* (fig. 11) *en un punto, hácia un mismo lado de una recta AB, valen juntos dos ángulos rectos ó π; y todos los ángulos ACF, FCD, DCE,*

ECB, BCP, PCN, NCM, MCA, que se pueden formar al rededor de un punto C, no valen mas ni ménos que cuatro rectos ó 2π.

255 Un ángulo es *suplemento* de otro, cuando es lo que le falta para dos rectos; así, KCB (fig. 9) es suplemento de ACK, y al contrario. Y un ángulo es *complemento* de otro, cuando es lo que le falta ó sobra para un recto; así, el ángulo KCD es complemento de cada uno de los dos ACK y KCB: del primero por esceso, y del segundo por defecto. De donde se deduce que *los ángulos que tienen un mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales; y los que tengan un mismo complemento, sólo serán iguales cuando los complementos sean ambos por esceso ó por defecto.*

256 Teor. *Si dos líneas tiradas al estremo de otra forman con ella dos ángulos que juntos valgan dos rectos, dichas dos líneas son una sola y misma línea.*

Espl. Sean AC y BC (fig. 12) dos rectas tiradas por el estremo C de la CD, de modo que $ACD+DCB=\pi$; digo que dichas dos rectas AC y CB son una sola y misma línea, ó que la CB es prolongacion de la AC.

Dem. Si esto no se verifica, la recta AC prolongada caerá ó por mas arriba ó por mas abajo de la BC. Si la prolongacion de la AC fuese la CE, seria (§ 254) $ACD+DCE=\pi$; y como por el supuesto $ACD+DCB=\pi$, será (intr. ax. 5.°) $ACD+DCE=ACD+DCB$; y quitando el ángulo comun ACD, queda $DCE=DCB$: lo que es absurdo, por ser DCE parte y DCB todo; luego la AC prolongada no puede caer por mas arriba de la CB.

Si dicha prolongacion fuese la CF, se tendria $ACD+DCF=\pi$; y como por el supuesto $ACD+DCB=\pi$, seria $ACD+DCF=ACD+DCB$; de donde quitando ACD, quedará $DCF=DCB$, que tampoco puede ser; luego si la AC prolongada no puede caer por mas arriba ni por mas abajo de la CB, caerá encima, y dichas rectas AC,

CB, serán una sola y misma línea. L. Q. D. D.

257 Teor. *Los ángulos opuestos al vértice son iguales.*

Espl. Sean las dos rectas AB, CD (fig. 13), que se corten en el punto O; digo que el ángulo AOD=COB, y que DOB=AOC.

Dem. Si consideramos que la DC cae sobre la AB, será (§ 254) AOD+DOB=π; y suponiendo que la BA cae sobre la DC, se tendrá COB+BOD=π; luego (intr. ax. 5.°) AOD+DOB=COB+BOD; y quitando el ángulo comun DOB, quedará AOD=COB; del mismo modo se demostrará que DOB=AOC, que es L. Q. D. D.

258 Se llama *triángulo rectilíneo*, ó simplemente triángulo, el espacio cerrado por tres líneas rectas, que se llaman *lados del triángulo.*

Los triángulos, con relacion á sus lados, se dividen en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*; y con relacion á sus ángulos, en *rectángulos y oblicuángulos.* Triángulo equilátero es *el que tiene sus tres lados iguales*, como ABC (fig. 14); isósceles *el que tiene dos lados iguales*, como ABC (fig. 15); y escaleno *el que tiene sus tres lados desiguales entre sí*, como ACB (fig. 16). Es rectángulo un triángulo *cuando tiene un ángulo recto*, como ACB (fig. 17); y es oblicuángulo *cuando no tiene ningun ángulo recto.* Este se llama *obtusángulo*, cuando tiene un ángulo obtuso, como ACB (fig. 16); y *acutángulo*, cuando sus tres ángulos son agudos, como ABC (fig. 14).

En el triángulo rectángulo el lado AB (fig. 17) opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*; y los otros dos lados AC, BC, *catetos.*

En general se llama *base* de un triángulo al lado sobre que se considera insistiendo; pero cuando el triángulo es isósceles, se llama *base* al lado que no es igual con ninguno de los otros. La línea que se baja perpendicularmente á la base ó á su prolongacion, desde el ángulo opuesto, se llama *altura*; así, las líneas AC son las bases en las (figs. 15 y 16), y

las BD las alturas; cuando en un triángulo rectángulo (fig. 17) se considera por base un cateto AC, la altura es el otro cateto BC.

259 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen sus tres lados iguales.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, *abc* (fig. 18), en que se supone AB=*ab*, AC=*ac* y BC=*bc*; digo que sus tres ángulos tambien son iguales; esto es, A=*a*, B=*b* y C=*c*.

Constr. Haciendo centro en A con un radio AC=*ac*, trácese el arco *mn*; y haciendo centro en B con BC=*bc*, trácese el arco *op*.

Dem. Concíbase superpuesto el triángulo *abc* sobre el ABC, de manera que el lado *ab* se confunda con AB: en lo cual no habrá dificultad (245) por ser AB=*ab*; con lo cual el punto *c* estremo de *ac*=AC, caerá en algun punto (246) del arco *mn*; y por ser *bc*=BC, el estremo *c* del lado *bc* caerá tambien en algun punto del arco *op*; pero los dos lados *ac*, *bc*, tienen su estremo en el punto comun *c*, luego este mismo punto será comun á los dos arcos *mn*, *op*; luego será su punto de interseccion; pero su punto de interseccion se halla en C, punto donde se encuentran los lados AC y BC del triángulo ABC; luego el punto *c* estremo del lado *ac* se habrá confundido con C estremo de AC; y como el punto *a* se habia confundido con A, resulta (245) que todo el lado *ac* se habrá confundido con AC; por la misma razon el lado *bc* se habrá confundido con BC; y habiéndose confundido sus tres lados, se habrán confundido tambien sus tres ángulos (251 esc.); es decir, que se tendrá A=*a*, B=*b*, C=*c*, que era L. Q. D. D.

Esc. Se debe advertir que los ángulos que resultan iguales, son los que en cada triángulo se oponen á los lados iguales.

260 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.*

Espl. Sean ABC, *abc*, dos triángulos, en que se

tenga AB=ab, AC=ac, y el ángulo en A= al en a; digo que dichos triángulos son iguales.

Dem. Concíbase superpuesto el triángulo abc sobre el ABC, de manera que el vértice a caiga sobre A, y el lado ab sobre AB, con lo que el lado ac caerá (251) sobre AC. Ahora, por ser ab=AB y partir estas líneas desde un mismo punto A, el punto b caerá sobre B; y por la misma razon el punto c caerá sobre C. Pero b y c no sólo son estremos de ab y de ac, sino que lo son tambien del lado bc; luego se han confundido los estremos del lado bc con los del BC; luego (245) todo el lado bc ha coincidido con BC; y habiéndose confundido sus tres lados, serán iguales dichos triángulos. L. Q. D. D.

261 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual á un lado, adyacente á dos ángulos iguales.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, abc, en que se supone el ángulo A=a, el B=b, y el lado AB, *adyacente* á los ángulos A, B del primero, igual al ab del segundo; digo que estos triángulos son iguales.

Dem. Concíbase superpuesto el triángulo abc sobre el ABC, de manera que el lado ab caiga sobre AB, lo cual se puede hacer, porque ab=AB; hecho esto, el lado bc tomará (251) la direccion del lado BC, por ser el ángulo B=b; y por la misma razon el ac tomará la direccion del AC. Ahora, como las rectas bc, ac, y BC, AC, se cortaban ántes de superponerse, y la superposicion no altera en nada la naturaleza de los triángulos, resulta que tambien se cortarán despues; y como dos rectas no pueden encontrarse (244 cor. 3.°) mas que en un punto, se sigue que habiéndose confundido las bc, ac con las BC, AC, el punto de interseccion c de las primeras, se habrá confundido con el punto de interseccion C de las segundas; luego se ha confundido el triángulo abc con el ABC, y será igual con él *L. Q. D. D.*

262 De lo dicho se infiere que con cualesquiera datos que satisfagan á lo demostrado en los teoremas anteriores, se podrá formar un triángulo igual á otro dado; y ademas se podrán resolver estos problemas.

263 1.° *En un punto* a (fig. 19) *de una línea* ab, *formar un ángulo* bac *igual con otro dado BAC.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en *a* con un radio cualquiera *ap*, trácese un arco indefinido *prq*; haciendo centro en A con el mismo radio, se trazará un arco PRQ, hasta que encuentre á los lados del ángulo CAB; con la cuerda PQ del arco PRQ, haciendo centro en *p*, se trazará un arco *ux*; por el punto de interseccion *q* y por *a*, tírese la línea *aq*, y se tendrá el ángulo *cab*=CAB. Porque si concebimos las cuerdas *pq*, PQ, que son iguales por construccion, los triángulos AQP, *aqp*, serán iguales (259), y por lo mismo el ángulo en *a*= al en A.

264 2.° *Dado un ángulo CAB, dividirle en dos partes iguales.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en A con un radio cualquiera AP, trácese entre sus lados un arco PRQ; haciendo centro en sus estremos P y Q, con un radio cualquiera, trácense dos arcos que se crucen en T, por A y T, tírese la línea AT, la cual dividirá el ángulo propuesto en las dos partes iguales QAT y TAP. Porque si se conciben los radios PT, QT, los triángulos QAT, TAP, serán iguales (259).

265 Teor. *En un mismo triángulo, ó en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales;* ó lo que es lo mismo, *en un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales*, y al contrario, *si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos tambien lo serán, ó el triángulo será isósceles.*

Esp. Sea en el triángulo ABC (fig. 15), AB=BC; digo que se tendrá el ángulo ACB= al BAC; y si se supone ACB=BAC, será AB=BC.

Dem. 1.° Por el vértice B y el punto D, medio del lado AC, concíbase tirada la DB, y resultará

que los triángulos ADB, BDC, serán iguales (259); luego los ángulos en A y en C, opuestos al lado comun BD, serán iguales. L. 1.° Q. D. D.

2.° Si los lados BC, AB no son iguales, serán desiguales. Supongamos que BA sea el mayor; tomando en él una parte AE=BC, y concibiendo la CE, los triángulos AEC, ABC, tendrán el lado AC comun, el lado AE=CB por construccion, y el ángulo EAC=ACB por el supuesto; luego (260) serán iguales, lo que es absurdo; porque el BAC es todo, y el AEC es su parte; luego si los lados BA y BC no pueden ser desiguales, serán iguales. L. 2.° Q. D. D.

Cor. Luego *el triángulo equilátero es equiángulo y al contrario.*

Esc. La igualdad de los triángulos ABD, BDC, prueba al mismo tiempo que el ángulo ABD=DBC, y que BDA=BDC; de donde se deduce (252) que estos dos últimos son rectos, y por consiguiente que *una línea tirada desde el vértice de un triángulo isósceles al medio de su base, es perpendicular á esta base, y divide á su ángulo opuesto en dos partes iguales.*

266 Teor. *Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo esterno es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. 20); digo que si se prolonga uno de los lados BC, el ángulo ACD que se llama *esterno* por estar fuera del triángulo) (es mayor que cualquiera de los dos BAC, ABC, opuestos á los lados que forman el esterno.

Dem. Para demostrarlo respecto del BAC, tírese por B y por el punto E medio de AC, la BE, y prolónguese de manera que la prolongacion EF=BE; únase el punto F con el C, y resultarán los triángulos ABE, FCE iguales (260); luego nos darán el ángulo BAE ó BAC=ECF; pero ACD> ECF, luego ACD> BAC.

Haciendo en el lado BC una construccion aná-

loga, se demostrará del mismo modo que BCK> ABC; y como (§ 257) BCK=ACD, resultará ACD> ABC, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° Siendo BAC < ACD, añadiendo ACB, será BAC+ACB <ACD+ACB; pero ACD+ACB=π, luego BAC+ACB <π; luego *en todo triángulo la suma de dos ángulos es menor que dos rectos.*

Cor. 2.° Luego *en todo triángulo rectángulo ú obtusángulo, cada uno de los otros dos ángulos debe ser agudo.*

Cor. 3.° *Desde un punto cualquiera* C (fig. 21), *fuera de una recta AB, no se le puede tirar mas de una perpendicular CD*; porque si se le pudieran tirar dos, tales como CD, CE, en el triángulo CDE los ángulos CDE, CED, valdrian juntos dos rectos, lo que es imposible.

Cor. 4.° *La perpendicular es la que mide la verdadera distancia que hay desde un punto á una línea*; pues es la única que se puede tirar de su especie.

Cor. 5.° *Tampoco se puede tirar mas de una perpendicular en un punto D de una línea AB*; porque si suponemos que haya dos, tales como DC, DK, se tendrá que los ángulos KDA, CDA, serán rectos, y por consiguiente iguales (253): lo que no puede ser, porque ADK es parte, y ADC es todo.

Cor. 6.° *Si desde un punto* C *de una oblicua CE se baja una perpendicular CD á la AB, caerá hácia el ángulo agudo*; porque si cayese hácia el ángulo obtuso, el ángulo ADC no podría ser mayor que él.

267 Teor. *En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo; y al contrario, al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

Espl. Sea el triángulo BAC (fig. 22); digo que si el lado AC> BC, será el ángulo ABC> BAC; y si se supone ABC> BAC, será AC> BC.

Dem. 1.° Tómese en el lado mayor AC una parte CD=BC, y tírese la BD: con lo cual el triángulo BDC dará los ángulos *n* y *m* iguales (265); pero *n*> A por ser esterno en el triángulo ABD, lue-

go tambien será $m > A$; y como $ABC > m$, con mas razon será $ABC > BAC$, que era L. 1.° Q. D. D.

2.° Si no es $AC > BC$, será AC igual ó menor que BC.

Si $AC = BC$, resultará por lo demostrado (265), que $ABC = BAC$, que es contra el supuesto; tampoco puede ser menor, porque entónces el ángulo ABC seria menor que el BAC, que es tambien contra el supuesto; luego si no puede ser $AC =$ ni $< BC$, será $AC > BC$, que es L. 2.° Q. D. D.

268 Teor. *La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.*

Espl. Sea BCA (fig. 23) un triángulo cualquiera; digo que $BA + CA > BC$.

Constr. Haciendo centro en B y con un radio igual al lado mayor BC, trácese el arco CED, hasta que encuentre al lado BA prolongado, y tírese la cuerda DC.

Dem. Las líneas BC y BD son iguales por radios de un mismo círculo, luego (265) en el triángulo CBD el ángulo $DCB = g$; pero el ángulo $r < DCB$ por ser parte suya; luego tambien será $r < g$. Luego en el triángulo DCA el ángulo $g > r$, y por lo mismo (267) el lado $CA > DA$. Si á estas cantidades desiguales añadimos una misma cantidad AB, tambien permanecerán desiguales, y se tendrá $CA + AB > DA + AB$; y como $DA + AB = BD = BC$, se sigue que $CA + AB > BC$, que era L. Q. D. D.

269 Teor. *Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo, se tiran líneas á los vértices de dos de sus ángulos, la suma de estas líneas será menor que la de los lados del triángulo opuestos á los ángulos; y el ángulo que formen dichas líneas, será mayor que el ángulo que formen dichos lados.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. 24); digo que si desde un punto D, elejido dentro, se tiran dos líneas DB, DC, á dos ángulos cualesquiera B, C, se tendrá $BD + DC < AB + AC$; y que BDC, ó el ángulo en $o > m$.

Dem. 1.° Prolongando una cualquiera de las dos líneas, tal como BD, hasta que vaya á encontrar al lado opuesto AC, se tendrá (§ 268) $BA+AE > BE$; y añadiendo EC, será $BA+AE+EC > BE+EC$ ó reduciendo será $BA+AC > BE+EC$ (m).

Ahora, el triángulo DEC dará $DE+EC > DC$; y añadiendo BD, se tendrá $BD+DE+EC > BD+DC$, ó por ser $BD+DE=BE$, resultará

$$BE+EC > BD+DC.$$

Y como ántes (m) teníamos $BA+AC > BE+EC$, con mas razon se tendrá $BA+AC > BD+DC$, que era L. 1.° Q. D. D.

2.° El triángulo BAE da (266) el ángulo $n > m$; y por la misma razon el triángulo DEC dará el ángulo $o > n$; luego con mas razon $o > m$, que es L. 2.° Q. D. D.

270 Teor. *Si desde un punto á otro se tira una recta y una curva, la recta es mas corta que la curva.*

Espl. Si desde el punto A (fig. 25) al punto B, se tira la recta AB y la curva ACB, digo que $ACB > AB$.

Dem. Desde A y B tírense á un punto cualquiera C de la curva, las rectas AC y BC, y se tendrá (§ 268) $AC+CA > AB$;
y si desde los puntos C y A se tiran á uno cualquiera D, intermedio del arco AC, las AD, DC, se tendrá tambien $AD+DC > AC$ que añadiendo CB, da $AD+DC+CB > AC+CB$; y si volviéramos á tirar rectas á los puntos intermedios de los arcos AD, DC, &c., el conjunto de líneas que resultase seria mayor que el AD+DC+&c. pues la suma de cada dos líneas siempre seria mayor que su correspondiente; pero este conjunto de líneas, al paso que crece, se aproxima á la curva ACB, por tener mas puntos comunes con ella, y hallarse entre el conjunto anterior y la misma curva; luego la curva será mayor (227) que cada uno de estos conjuntos; y como cualquiera de estos es mayor que AB, con mas razon será la curva $ACB > AB$, que es L. Q. D. D.

Cor. Luego *la línea recta es la mas corta de todas cuantas se pueden tirar desde un punto á otro.*

271 Teor. *Si desde un punto á otro se tira una línea recta, y diferentes curvas, que sean cóncavas ó convexas hácia un mismo lado, la curva que mas se acerque á la recta será la mas corta.*

Espl. Si desde el punto A al punto B (fig. 26), se tiran diferentes curvas ACB, ADB, la ACB que mas se acerca á la recta AB, es la mas corta.

Dem. Concíbase por el punto C la recta MN, que sólo tenga el punto C comun con la curva interior ACB, estando toda ella fuera, y en virtud de lo demostrado (270) se tendrá MDN > MN; y añadiendo AM+NB, resultará

MDN+AM+NB > MN+AM+NB; pero el primer miembro MDN+AM+NB = curva ADB, y el segundo MN+AM+NB = conjunto AMNB; luego ADB > AMNB.

Concíbase ahora por los puntos P y U, tomados entre C y A y entre C y B, las rectas RS y TQ con las mismas circunstancias que la MN, y se tendrá (§ 270 cor.) RM+MS > RS, TN+NQ > TQ; y sumando ordenadamente resultará

RM+MS+TN+NQ > RS+TQ.

Añadiendo á ambos miembros la cantidad

AR+ST+QB,

será RM+MS+TN+NQ+AR + ST + QB > RS+TQ+AR+ST+QB; pero el primer miembro = conjunto AMNB, y el segundo = ARSTQB; luego AMNB > ARSTQB, y con mas razon será ADB > ARSTQB.

Y como si se tirasen rectas por los puntos intermedios de los arcos AP, PC, CU, &c. se demostraria del mismo modo que el conjunto de líneas que fuese resultando, seria menor que el anterior ARSTQB, y asi sucesivamente, se sigue que con mas razon la curva ADB será mayor que cualquiera de estos conjuntos; pero estos conjuntos de líneas, al paso que menguan, se van acercando á la curva ACB,

por tener mas puntos comunes con ella y estar cada conjunto entre la curva y el conjunto anterior; luego (228) la curva ACB es menor que cualquiera de estos conjuntos, y con mas razon se tendrá ACB <ADB, que era L. Q. D. D.

Cor. Puesto que la curva interior es menor que cualquier conjunto de líneas, *cada arco de curva será menor que la porcion de líneas correspondientes á dicho arco*, ó lo que es lo mismo arco CoP <PS+CS.

272 Teor. *Si dos lados de un triángulo son iguales á dos de otro, y el ángulo que forman es desigual, el lado opuesto al mayor ángulo será mayor que el que en el otro triángulo está opuesto al ángulo menor.*

Espl. Sean dos triángulos ABC, DEF (fig. 27), tales que AC=DF, AB=DE, y el ángulo BAC> EDF; digo que BC> FE.

Dem. Superpóngase el triángulo DEF sobre el BAC, de manera que el lado DF se confunda con AC, con lo que el triángulo DEF vendrá á tener la posicion del AE′C cayendo DE dentro del ángulo BAC por ser el ángulo FDE < BAC.

Aquí pueden ocurrir tres casos: 1.°, que el punto E caiga fuera del triángulo ABC como en E′. 2.° Que caiga sobre el lado BC como en H; y 3.°, que caiga dentro del triángulo como en K.

1.° Si cae en E′ será (§ 268)
E′G+GC > E′C, y AG+GB > BA; y sumando ordenadamente se tendrá
E′G+GC+AG+GB > E′C+BA, ó lo que es lo mismo E′A+BC> E′C+BA; y suprimiendo en ambos miembros E′A y BA, que son iguales por ser E′A=DE=BA, quedará BC > E′C=EF.

2.° Si E cae en H, en el lado BC, se tendrá (ax. 4.°) BC > HC=FE.

3.° En fin, si el punto E cayese dentro, v. g. en K, se tendria (§ 269) AB+BC > AK+KC, y quitando AB y AK, que son iguales por ser DE=AK=AB, quedará BC > KC=EF, que es L. Q. D D.

Cor. Recíprocamente, *si dos lados de un trián-*

gulo son iguales á dos de otro, y el tercer lado desigual, el ángulo opuesto en el triángulo donde el lado sea menor, será menor que el del otro triángulo donde el lado es mayor. Porque no puede ser igual ni mayor.

273 Teor. *Si desde un punto fuera de una recta, se tira una perpendicular y diferentes oblícuas, primero, la perpendicular será mas corta que las oblícuas; segundo, las oblícuas que disten igualmente de la perpendicular, serán iguales; y tercero, la oblícua que mas se separe de la perpendicular, será la mas larga.*

Espl. Si desde el punto A fuera de la FD (fig. 28) se le tira una perpendicular AB, y diferentes oblícuas AE, AC, AD, se verificará: 1.° que la AB será la mas corta de todas; 2.° que las oblícuas AE, AC, equidistantes de la perpendicular AB, serán iguales; y 3.° que de las oblícuas AC, AD, la AD que mas se separa de la perpendicular, será la mas larga.

Dem. 1.° Por ser el triángulo ABC rectángulo en B, y ser el ángulo recto el mayor de un triángulo (266 cor. 2.°), se sigue (267) que el lado $AC > AB$, ó $AB < AC$, que es L. 1.° Q. D. D.

2.° Si $BC = BE$, los triángulos ABE, ABC, serán iguales (260); luego darán $AE = AC$, que es L. 2.° Q. D. D.

3.° Siendo el triángulo ABC rectángulo en B, el ángulo ACD, esterno de dicho triángulo será obtuso, pues ha de ser mayor (266) que el interno y recto ABC; luego (266 cor. 2.°) el ángulo ACD es el mayor del triángulo ACD, y por lo mismo se le opondrá mayor lado (267); luego $AD > AC$; que era L. 3.° Q. D. D.

Cor. 1.° *Desde un mismo punto fuera de una línea, no se le pueden tirar tres rectas iguales.*

Cor 2.° *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, ó uno de los ángulos agudos;* porque pri-

mero sean los triángulos ABC y DEF (fig. 29), en que se supone AC=DF y AB=DE; digo que BC=EF; y por lo mismo estos triángulos son iguales (259).

En efecto, si colocamos el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que DE se confunda con AB, resultará que como los ángulos en B y en E son iguales por rectos, el lado EF caerá sobre el BC (§ 251). Ahora, si el punto F no cae sobre el punto C, caerá ó mas á la izquierda como en G, ó mas á la derecha como en H.

Si cae en G, la línea DF estará representada por la AG; y como por el supuesto DF=AC, se tendrá AC=AG, que es un absurdo, pues se tendrán dos oblícuas iguales á un mismo lado de la perpendicular AB. Como del mismo modo se demostraria que no puede caer hácia la derecha de C, v. g. en H, resulta que caerá sobre C; luego se habrán confundido los tres lados del triángulo DEF con los del ABC; luego son iguales.

Sea en 2.° lugar AC=DF, y el ángulo BAC=EDF; colocando el triángulo DEF sobre el BAC, de modo que DF se confunda con AC, la DE tomará la direccion de AB (§ 251); y como el punto F se ha confundido con C, si la FE no cayese sobre la CB, se podrian tirar desde C dos perpendiculares á AB, lo que es absurdo; luego los triángulos serán iguales.

Cor. 3.ª *Si un punto de una perpendicular dista igualmente de dos puntos de la línea á que lo es, todos los puntos de la primera estarán á igual distancia de aquellos mismos puntos de la segunda.* Porque si fuese B (fig. 28) el punto que distase igualmente de E y C, desde cualquier punto A, M ó H, de la AH, que se tirasen líneas á E y C, serian iguales (260) los triángulos ABE, ABC, los MBE y MBC tambien, ó los HBE, HBC; luego se tendrá AE=AC, ME=MC y HE=HC.

Si el punto A que se halla fuera de la FD, dis-

ta igualmente de E y de C, será AE=AC; y como tienen un lado AB comun los triángulos rectángulos ABE, ABC, resultará (cor. anter.) que EB=BC; y si por un punto cualquiera de AB, tal como M, se tirán las ME, MC, serán iguales, por hipotenusas de triángulos EBM, MBC, iguales; y como lo mismo se demostraria de cualquier otro punto, resulta la proposicion.

Cor. 4.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual tambien el ángulo opuesto al mayor de ellos.*

Espl. Sean ABC, DEF (fig. 24 *) dos triángulos en que se supone AB=ED, AC=DF, ACB=DFE, sabiéndose ademas que BA > AC; digo que los dos triángulos ABC, EDF son iguales.

Dem. Por ser AB > AC, resulta (267) que el ángulo ACB > ABC; luego el ángulo ABC será por precision agudo, pues que si ACB es agudo, con mas razon lo será el ABC que es menor que él; si ACB fuese recto, ú obtuso el ABC seria (266 cor. 2°.) por precision agudo; luego la AB será oblicua respecto de la BC, y por la misma razon tendrémos que DE será oblicua respecto de EF. Ahora, los ángulos ACB, DFE que son iguales, no pueden ménos de ser agudos, rectos ú obtusos.

Si los suponemos agudos, resulta que las AC y DF serán tambien oblicuas respecto de las BC, EF, y concibiendo las perpendiculares AP, DQ caerán dentro de los triángulos ACB, DEF (266 cor. 6.°), y los triángulos ACP, DFQ serán iguales (cor. 2.°), pues son ambos rectángulos el uno en P y el otro en Q, tienen iguales las hipotenusas AC, DF, y ademas tienen iguales los ángulos agudos ACP, DFQ; luego AP=DQ y PC=QF. Ahora, por ser AP=DQ, resulta que los triángulos APB, DQE rectángulos en P y en Q serán iguales (cor. 2.°), pues que ademas de ser rectángulos tienen iguales las hipotenusas AB, ED y los catetos AP, DQ. Luego PB=QE; y sumando esta ecuacion con la P=CQF, será

BC=EF: y por consiguiente teniendo por el supuesto AB=DE, AC=DF, y por lo que acabamos de demostrar BC=EF, resulta que los triángulos ABC, DEF tienen iguales sus tres lados; luego (259) serán iguales.

Si los ángulos ACB, DFE fuesen rectos, entónces los triángulos rectángulos ACB, DFE tendrian por el supuesto iguales las hipotenusas AB, DE, y los catetos AC, DF, luego (cor. 2.°) serian iguales.

Si los ángulos ACB, DFE fuesen obtusos, como en la (fig. 25*), resulta que las perpendiculares AP, DQ, caerian fuera de los triángulos (266 cor. 6°.), y resultaría que siendo iguales por el supuesto los ángulos ACB, DFE, sus suplementos ACP, DFQ serán tambien iguales; y los triángulos ACP, DFQ rectángulos en P y en Q serán iguales (cor. 2.°), pues ademas tienen iguales las hipotenusas AC, DF; de donde resulta AP=DQ y CP=FQ. De ser AP=DQ, y de tener por el supuesto AB=DE, resulta que los triángulos ABP, DEQ rectángulos en P y en Q serán iguales (cor. 2.°); y por lo mismo BP=EQ; restando de esta ecuacion, la CP=FQ, se tiene BC=EF; y como por el supuesto AB=DE, y AC=DF, resulta que los triángulos ABC, DEF tienen sus tres lados iguales, y por consiguiente (259 serán iguales. Luego en todos los casos es verdadera la proposicion.

Cor. 5.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo opuesto al menor de ellos; con tal que en ambos triángulos sea de la misma especie el ángulo opuesto al mayor lado; esto es, que en ambos sea agudo ú obtuso.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, DEF (figs. 24* y 25*); en los cuales suponemos que AB=DE, AC=DF, ABC=DEF, en los cuales sabemos ademas que AC <AB y DF <DE, y que los ángulos ACB, DFE son en ambos triángulos de una misma especie, esto es, son en ambos ó agudos como en la (fig. 24*) ó en ambos obtusos como en la (fig. 25*);

digo que son iguales los espresados triángulos ABC, DEF.

Dem. Colóquesé el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que DE se confunda con AB, y resultará (251) que el lado EF caerá sobre el BC.

Ahora, las circunstancias que se suponen conocidas, dan á entender que las AC y DF no son perpendiculares á las BC, EF, pues que si lo fuesen, los ángulos en C y F serian rectos y los triángulos ABC, DEF serian iguales por lo demostrado (cor. 2.°). Luego si concebimos por A una perpendicular al lado opuesto BC, resultará que por ser DF=AC y estar el punto D confundido con A, que la DF ó se confundirá con AC ó caerá en A*c* (263) de modo que PC=P*c*. Mas si suponemos que caiga en A*c*, el ángulo DFE estará representado por el A*c*B, y tendrémos (fig. 24*) que A*c*B > P será obtuso; y el ACP=A*c*P, por la igualdad de los triángulos APC, AP*c* (cor. 2.°), será agudo; y como por el supuesto se sabe que los ángulos DFE, ACB son de una misma especie, resulta que la DF no puede caer á diverso lado de la perpendicular; luego caerá al mismo lado y se confundirá DF con AC, cayendo el punto F sobre C, y todo el lado EF se habrá confundido con BC. Luego los dos triángulos se habrán confundido y serán iguales.

La misma consecuencia se saca respecto de la (fig. 25*); pues si suponemos que al hacer la superposicion, la DF no caiga sobre la AC, sinó que tome la posicion de A*c*, al otro lado de la perpendicular, el ángulo ACB > P seria obtuso, y el ángulo A*c*P que representa al DFE seria agudo, que es contra el supuesto; luego no se puede suponer que la DF caiga hácia diferente lado de la perpendicular respecto de la AC; luego caerá encima y se confundirá con ella; luego los triángulos DEF y ABC se confundirán en un todo y serán iguales.

Cor. 6.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual un ángulo opuesto á uno*

de ellos, con tal que el ángulo opuesto al otro de los lados iguales, sea de una misma especie en ambos triángulos.

Espl. Sean ABC, *abc* (fig. 26*) dos triángulos cualesquiera, en los que suponemos AB=*ab* BC=*bc* y A=*a*; voy á demostrar que si se sabe ademas que los ángulos C, *c* son ambos rectos, ambos agudos, ó ambos obtusos, los espresados triángulos son iguales.

Dem. Superpóngase el triángulo *abc* sobre ABC, de modo que *ab* se confunda con AB, y tendrémos que, por ser *ab*=AB, el punto *b* se confundirá exactamente con B; y por ser el ángulo *a*=A, el lado *ac*, caerá sobre el lado AC. Ahora, si el punto *c* no cae precisamente sobre C, caerá ó á su izquierda como en D ó á su derecha como en E.

Supongamos que caiga en D, y tendrémos, que el triángulo *abc* estará representado por ABD, siendo el ángulo *c*=ADB Pero si *c* y C son rectos habrá dos perpendiculares BD, BC tiradas desde B á la AC, lo que es imposible. Si los ángulos *c* y C fuesen agudos, el ADB=*c* seria agudo, y BDC, suplemento de ADB seria obtuso (254) y por consiguiente mayor (252) que el ángulo C, que es agudo; luego el triángulo BDC nos daria (267) BC > BD, lo que es contra el supuesto, que exige el que BC=*bc*=BD. Si los ángulos *c* y C fuesen obtusos, el ADB sería obtuso, y su suplemento BDC sería agudo; por lo que BC seria (266 cor. 2.° y 267) menor que BD, y por consiguiente que su igual *bc*, lo que tambien es contra el supuesto; luego en ninguno de los tres casos de ser los ángulos C, *c* rectos, agudos ú obtusos se puede verificar que el punto *c* caiga hácia la izquierda de C, al superponerse los triángulos; y como por un razonamiento análogo deduciríamos que tampoco puede caer dicho punto á la derecha de C, por ejemplo en E, resulta que debiendo caer sobre la AC, se habrá confundido precisamente *c* con C; y como *b* se ha-

bía confundido con B, todo el lado *bc* se habrá confundido (245) con BC; y habiéndose confundido los tres lados, se han confundido los triángulos y por consiguiente estos serán iguales, que era L.Q.D.D.

Cor. 7.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual é iguales tambien dos ángulos que el uno sea el opuesto al lado igual.*

Dem. Sean ABC, *abc* (fig. 26*) dos triángulos cualesquiera, en los que se tenga AB=*ab*, A=*a*, C=*c*. Superpóngase el triángulo *abc* sobre el ABC, de modo que *ab* se confunda con AB, y tendrémos que por ser AB=*ab*, el punto *b* caerá exactamente sobre B; y por ser el ángulo A=*a*, el lado *ac* caerá sobre AC. Ahora, si el punto *c* no se confunde con C, caerá hácia la izquierda de éste como en D ó hácia su derecha como en E; y el triángulo *abc* estará representado por el ABD ó por el ABE; en cuyo caso el ángulo ACB sería menor que el BDA y mayor que el BEA (266); y como tanto el ADB como el BEA espresarian el ángulo *c*, resulta, que en ninguno de estos casos podria ser el ángulo *c*=C, como exige el supuesto. Luego el punto *c* no puede ménos de caer sobre el punto C; en cuyo caso todo el lado *bc* se habrá confundido con BC, y habiéndose confundido los tres lados del triángulo *abc* con los del ABC, estos serán iguales; que era L.Q.D.D.

En el Apéndice puesto al fin de la segunda parte de la Geometría, en la tercera edicion del tomo I. parte 2.ª del Tratado elemental demuestro otros seis casos de igualdad de triángulos.

274 Teor. *Si una recta tiene dos puntos que disten igualmente de otros dos de otra, le será perpendicular.*

Espl. Si los dos puntos A y H, ó A y B, ó A y M, de la recta AH, distan igualmente de los puntos E y C de la FD, digo que la AH es perpendicular á la FD.

Dem. 1.° Sean los dos puntos A y H, ó sea AE=AC y HE=HC, lo que dará los triángulos

AEH, AHC iguales (259), pues ademas tienen comun el lado AH; la igualdad de estos triángulos dará el ángulo EAB=BAC; luego los triángulos EAB, ABC, serán iguales: pues tienen los ángulos EAB, BAC, iguales, comun el lado AB, é iguales tambien los lados AE, AC por el supuesto; luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente rectos (252); luego la AH es perpendicular á la FD.

2.° Sean ahora los puntos A y B, y tendrémos AE=AC y BE=BC; y por lo mismo los triángulos ABE, ABC, serán iguales (259); luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente rectos; luego la AH será perpendicular á la FD.

3.° Sean los dos puntos A y M, y se tendrá AE=AC, ME=MC; luego los triángulos AME, AMC, serán iguales (259), lo que da el ángulo EAM=CAM; y teniendo los triángulos AEB, ACB, iguales los ángulos en A y los lados que los forman, á saber: AE=AC por el supuesto, y AB por comun, serán iguales (260); luego los ángulos en B son iguales, y por consiguiente rectos; luego la AH es perpendicular á la FD, que es L. Q. D. D.

Cor. *Si una perpendicular CD* (fig. 21) *tiene un punto cualquiera D, equidistante de dos A y B de la linea AB que lo es, pasa por todos los puntos que en dicho plano distan igualmente de A y de B.* Porque si hubiese otro punto tal como K con esta circuntancia, tirando por él y por D, la DK, esta seria perpendicular á la AB, por lo que acabamos de demostrar; y como CD lo es por el supuesto, resultarian dos perpendiculares en un mismo punto de la recta AB, lo que es absurdo (266 cor. 5.°).

275 Prob. 1.° *Desde un punto A fuera de una linea BC* (fig. 30), *tirar una perpendicular á esta linea.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en el punto dado A, y con un radio cualquiera, trácense dos arcos que corten á la linea en D y E; haciendo centro en

estos puntos D y E, con el mismo ó con otro radio cualquiera, trácense por la parte inferior otros dos arcos que se corten; por el punto de interseccion F y el punto dado A, tírese la AF, que será perpendicular á la BC. Porque tiene dos puntos A y F á igual distancia de los D y E.

276 Probl. 2.° *Por un punto A de una línea BC* (fig. 31), *tirarle una perpendicular.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en el punto dado A, trácense dos arcos en D y E con un radio cualquiera; haciendo centro en D y E con un radio arbitrario; pero mayor que AE, trácense dos arcos por arriba ó por abajo; por el punto de interseccion F y el punto dado A, tírese la FA, que será perpendicular á la BC. Porque tiene dos puntos A y F á igual distancia de los D y E.

277 Probl. 3.° *Dividir una línea AB* (fig. 32) *en dos partes iguales.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en sus estremos A y B con un mismo radio, trácense dos arcos que se corten por la parte de arriba, y otros dos que se corten por la parte de abajo; y tirando la FG dividirá á la AB en dos partes iguales. Porque teniendo la FG dos puntos equidistantes de A y B, será perpendicular (274) á la AB, y tendrá (273 cor. 3.°) todos sus puntos á igual distancia de A que de B; luego AH=HB.

De las paralelas.

278 Cuando dos líneas rectas se hallan en un plano, de modo que no se encuentran aunque se las prolongue todo lo que se quiera, como AB, CD (fig. 33), se llaman *paralelas.*

Cuando dos paralelas AB, CD son cortadas por una línea FE, esta se llama *secante*; la cual forma con las paralelas ocho ángulos: cuatro, *m*, *n*, *p*, *q*, *internos*; y cuatro, *k*, *l*, *r*, *s*, *esternos.*

Cuando se comparan dos ángulos internos á di-

ferente lado de la secante, uno en cada paralela, se llaman ángulos *alternos internos*: tales son los *m* y *q*, y los *n* y *p*; cuando se comparan dos ángulos internos á un mismo lado de la secante, como los *m*, *p*, ó los *n*, *q*, se llaman solamente *internos*; cuando se comparan dos ángulos esternos, uno en cada paralela hácia diferente lado de la secante, se llaman *alternos esternos*: tales son los *k* y *r*, y los *l* y *s*; cuando se comparan dos ángulos esternos á un mismo lado de la secante, tales como *k* y *s* ó *l* y *r*, se llaman simplemente *esternos*; y cuando se comparan dos ángulos, uno en cada paralela, á un mismo lado de la secante, uno dentro y otro fuera, se llaman *correspondientes*: tales son los *k* y *p*, los *m* y *s*, los *l* y *q*, y los *n* y *r*.

279 Teor. *Dos líneas perpendiculares á una tercera son paralelas.*

Espl. Si las dos líneas AB, CD, son perpendiculares á la GH, son paralelas, ó no se pueden encontrar en ningun punto del plano donde se hallan.

Dem. Porque si se encontrasen, desde el punto en que lo hiciesen, se tendrian tiradas dos perpendiculares á la GH, lo que no puede ser (266 cor. 5.°).

Cor. 1.° Luego *para tirar uua paralela á una linea dada AB, desde un punto cualquiora G, se bajará á esta línea desde dicho punto una perpendicular GH, y en dicho punto G se tirará á esta perpendicular GH, otra línea GD que le sea perpendicular, la cual será paralela á la propuesta AB*; por ser ambas perpendiculares á la GH.

Cor. 2.° Y como desde el punto G no se puede bajar mas de una perpendicular GH á la AB, y en G solo se puede levantar una perpendicular á GH, resulta que *por un punto dado, sólo se podrá tirar una paralela á una línea dada.*

280 Teor. *Si una línea es perpendicular á una de dos paralelas, lo será tambien á la otra.*

Espl. Sean AB, CD dos paralelas, y GH per-

pendicular á AB; digo que la GH tambien es perpendicular á la CD.

Dem. Si la GH no es perpendicular á CD, le será oblícua, y por G se podrá concebir una línea TU perpendicular á GH, la cual (279 cor. 1.°) será paralela á BA; y como la CD lo es por el supuesto, se tendrán por el punto G tiradas dos paralelas CD, UT á la AB, lo que no puede ser (279 cor. 2.°).

281 Teor. *Si dos rectas cortadas por otra, forman ángulos alternos internos, ó alternos esternos, iguales, dichas rectas serán paralelas.*

Espl. Sean AB, CD, dichas rectas, y EF la secante; digo que si $n=p$, ó $m=q$, ó $k=r$, ó $l=s$, dichas líneas no se encuentran, ó serán paralelas.

Dem. 1.° Sea $n=p$ ó $m=q$, y se tendrá que las líneas AB, CD no se podrán encontrar en un punto K hácia la derecha de FE; porque entónces las tres líneas FE, CD, AB, formarian un triángulo, en el cual por ser $n=p$ ó $m=q$, el ángulo esterno n seria igual á uno de los internos opuestos p, lo que no puede ser en virtud de lo demostrado (266).

Del mismo modo se demuestra que no se pueden encontrar hácia la izquierda; luego dichas líneas son paralelas. L. 1.° Q. D. D.

2.ª Si se supone $k=r$ ó $l=s$, sus opuestos al vértice n y p ó m y q, serán iguales; pero estos son alternos internos, luego por la primera parte del teorema, dichas líneas son paralelas. L. 2.° Q. D. D.

282 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra, forman con ella los ángulos correspondientes iguales, serán paralelas.*

Dem. Porque si se supone $k=p$, como $k=n$ (§ 257), será $n=p$, que es el caso anterior; luego serán paralelas. L. Q. D. D.

283 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra, forman ángulos internos ó esternos, que juntos valgan dos rectos, dichas líneas son paralelas.*

Dem. Porque si se supone $m+p=\pi$, como $m+n=\pi$

(§ 254), será (int. ax. 5.°) $m+p=m+n$, de donde quitando m, quedará $p=n$; luego (281) serán paralelas. Y si se supone $k+s=\pi$, como $p+s=\pi$, será $k+s=p+s$, y quitando s, quedará $k=p$; pero estos son correspondientes, luego (282) serán paralelas. L. Q. D. D.

284 Teor. *Si una secante corta dos paralelas, se verifica: 1.°, que los ángulos alternos internos son iguales: 2.°, que los alternos esternos tambien lo son: 3.° que tambien son iguales los correspondientes: 4.° que los dos internos juntos valen dos rectos, ó son el uno suplemento del otro, y 5.°, que lo mismo se verifica en los esternos.*

Espl. Sean AB, DE (fig. 34) las paralelas y FK la secante; digo 1.° que los ángulos $m=n$ y $p=q$; 2.° que $r=t$ y $u=s$; 3.° que $r=n$, $p=s$, $u=q$ y $m=t$; 4.° que $m+q=\pi$, $n+p=\pi$, y por lo mismo m es suplemento de q, y n de p; y 5.° que $r+s=\pi$, $u+t=\pi$. ó que r es suplemento de s, y u de t.

Dem. 1.° Por el punto L, medio de la parte CO de la FK, interceptada por las paralelas, concibase GH perpendicular á una de las dos paralelas, la cual lo será tambien á la otra (280), y por lo mismo los dos triángulos GLO, CLH, serán rectángulos en G y H; y como LO=LC por construccion, y los ángulos en L son iguales (257), dichos triángulos (273 cor. 2.°) serán iguales, y darán el ángulo en $m=n$; y como los p y q son sus suplementos, serán (255) tambien iguales. L. 1.° Q. D. D.

2.° Como (§ 257) $m=r$ y $n=t$, y por lo acabado de demostrar es $m=n$, será $r=t$; del mismo modo se demuestra que $u=s$, que es L. 2.° Q. D. D.

3.° El ángulo $m=r$ (§ 257) y $m=n$ por alternos internos; luego $r=n$; del mismo modo se demuestra que $p=s$, $u=q$ y $m=t$, que es L. 3.° Q. D. D.

4.° Siendo $m+p=\pi$, resulta que por ser $m=n$, se tendrá $n+p=\pi$, y por lo mismo n es suplemento de p; y como lo mismo se demuestra respecto de m y q, resulta L. 4.° Q. D. D.

5.° Siendo $p+r=\pi$, y $p=s$, será $r+s=\pi$, y por

lo mismo r es suplemento de s; y como lo mismo se demuestra de los u y t, resulta L. 5.° Q. D. D.

285 Teor. *Si una línea es paralela á una de dos paralelas, lo es tambien á la otra.*

Espl. Sean las líneas AB, DE paralelas, y la XZ paralela á AB; digo que tambien lo será á la DE.

Dem. Por ser AB y XZ paralelas, se tiene (284 3.°) $k=r$; y por serlo las AB, DE, se tiene $n=r$; luego $k=n$; luego XZ es (282) paralela á DE. L. Q. D. D.

286 Teor. *Las partes de paralelas interceptadas entre paralelas son iguales.*

Espl. Sean AB, CD (fig. 35) dos paralelas; digo que si desde la AB se tiran á la CD las FG, HE, KL, MN, &c. paralelas entre sí, todas estas partes, y lo mismo las FH, GE, ó HK, EL, &c. comprendidas por las paralelas, son iguales.

Dem. Tírese la secante GH, y se tendrán los triángulos FGH, GHE, que por tener el lado GH comun, el ángulo $p=m$, por alternos internos entre las paralelas AB, CD, el ángulo $n=q$ por la misma razon entre las FG, HE, serán (261) iguales; luego se tendrá FG=HE, FH=GE. Del mismo modo se demuestra de todas las demas, y resulta L. Q. D. D.

Esc. 1.° Si fuesen perpendiculares sucederia lo mismo, y se deducirá que *las paralelas están equidistantes en todos sus puntos.*

Esc. 2.° La igualdad de los triángulos FGH, GHE, da el ángulo GFH=GEH; y como $n=q$, y $m=p$, será sumando $n+m=q+p$, ó FGE=FHE.

287 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra, forman con ella dos ángulos internos que juntos valgan ménos que dos rectos, dichas líneas se encontrarán hácia el paraje donde forman dichos ángulos.*

Espl. Si las dos líneas UT, AB (fig. 33), cortadas por la GH, forman los dos ángulos UGH, AHG, tales que UGH+AHG $<\pi$, se llegarán á encontrar hácia la izquierda de la GH.

Dem. Si no se encuentran, serán paralelas (278); pero si en G formamos el ángulo HGC tal, que jun-

to con el AHG valga dos rectos ó π, la linea DC será paralela á la AB; luego se tendrian tiradas por el punto G dos paralelas UT, CD, á una misma línea AB, lo que no puede ser (279 cor. 2.°); luego dichas líneas, prolongadas suficientemente, se encontrarán. Y esto se verificará hácia la izquierda de la GH, porque no pudiendo la UY volver á encontrar (244 cor. 3.°) en ningun punto á la GD, con menos razon podrá encontrar á la parte HB; luego se encontrarán hácia la izquierda, que es hácia donde forman los ángulos cuya suma es menor que dos rectos. L. Q. D. D.

288 Teor. *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, ó son iguales, ó son el uno suplemento del otro; son iguales, cuando sus vértices están vueltos hácia un mismo lado, ó en situacion enteramente opuesta; y son el uno suplemento del otro, cuando le tienen vuelto hácia diferente lado.*

Espl. Los dos ángulos n, m (fig. 36), que tienen sus lados paralelos y sus vértices vueltos hácia un mismo lado, ó los m y o que los tienen en una situacion enteramente opuesta, son iguales; y los DEG y m, que tienen los lados paralelos y sus vértices hácia diferente lado, son el uno suplemento del otro.

Dem. Prolónguese la DE hasta que encuentre á la BC en H; y será $n=p$, por correspondientes entre las paralelas GF, BC, siendo la secante DH; y $p=m$ por correspondientes entre las paralelas AB, DH, y la secante BC; luego $m=n$; y como $n=o$ por opuesto al vértice, será tambien $m=o$.

Ahora, DEG es suplemento de n; luego tambien lo será de su igual m, que era todo L. Q. D. D.

289 Teor. *Los tres ángulos de un triángulo válen juntos dos rectos, ó π.*

Dem. Si por el vértice A (fig. 37), se tira la DE paralela al lado BC, se tendrá $m=C$, $n=B$, por alternos internos entre las paralelas BC, DE, siendo las secantes AC, AB; luego sumando será $m+n=C+B$;

y añadiendo el ángulo o, será $m+n+o=C+B+o$; pero (§ 254 cor. 3.°) $m+n+o=\pi$, luego $C+B+o=\pi$, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° *Luego dados dos ángulos de un triángulo, se conocerá el tercero, restando de dos rectos la suma de los dos dados; y dado un ángulo, se hallará la suma de los otros dos, restándole de dos rectos; así, en un triángulo cualquiera un ángulo es suplemento de la suma de los otros dos, y al contrario; y en un triángulo rectángulo cada ángulo agudo es complemento del otro*; pues entre los dos valen un recto.

Cor 2.° *Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual al tercero*; pues en ambos ha de ser lo que falta á los otros dos para dos rectos.

Del círculo y de las rectas consideradas en él.

290 Teor. *El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

Espl. Sea AB un diámetro (fig. 38), y AD una cuerda; digo que AD < AB ó que AB > AD.

Dem. Tirando el radio OD al otro estremo de la cuerda, se tendrá (§ 268) AO+OD > AD; pero AO+OD=AB, luego AB > AD, que era L. Q. D. D.

291 Teor. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, arcos iguales tienen cuerdas iguales, y cuerdas iguales subtenden arcos iguales.*

Espl. Sea ADBF (fig. 39) un círculo; digo que si se suponen los arcos AzD, AxF iguales, las cuerdas AD, AF tambien lo serán; y si se suponen las cuerdas AD, AF iguales, los arcos AzD, AxF serán iguales.

Dem. 1.° Tírese el diámetro AB; y concibiendo doblada por él la figura, la parte AFB se confundirá (249) con ADB; y por ser iguales los arcos AzD y AxF, el punto F caerá sobre el punto D; pero el punto F es tambien estremo de la cuerda AF, y D lo es de la AD: y ademas dichas líneas tienen comun el punto A; luego se han confundido en sus estremos; luego (245) serán iguales. L. 1.° Q. D. D.

2.º Si AD=AF, tirando los radios CD, CF, los triángulos ACD, ACF, serán iguales (259), y darán el ángulo CAF= al CAD. Esto supuesto, si se dobla la figura por el diámetro AB, la parte AFD, caerá sobre ADB, y el punto F caerá sobre el punto D, por la igualdad de los triángulos; pero el punto F y el D, estremos de las cuerdas, son tambien estremos de los arcos; luego habiéndose confundido los estremos de los arcos, serán iguales. L. 2.º Q. D. D.

Cor. Si en el primer caso tiramos los radios CD, CF, los triángulos ACD, ACF, serán iguales (259), y darán el ángulo ACD= al ACF; de donde se deduce que si *desde los estremos de dos arcos iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales, se tiran radios al centro, los ángulos formados por dichos radios son iguales.*

292 Teor. *En un mismo círculo, ó en círculos iguales el mayor arco tiene mayor cuerda; y la mayor cuerda subtende á mayor arco,*

Dem. 1.º Porque si se supone el arco AzH > AzD, tirando las cuerdas AD, AH, y los radios CD, CH, los dos lados AC, CH del triángulo ACH, serán iguales á los dos lados AC, CD del ACD; el ángulo ACH, que es todo respecto del ACD, será mayor que él; y por lo mismo (272) el tercer lado AH > AD, que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si AH > AD, digo que será AzH > AzD.

Porque si esto no se verifica, será AzH = ó < AzD. Si AzH=AzD, resultará AH=AD, que es contra el supuesto; si AzH < AzD, se tendria por la primera parte AH < AD, que tambien es contra el supuesto; luego no pudiendo ser AH igual ni menor que AD, será AH > AD, que es L. 2.º Q. D. D.

293 Teor. *A una línea que corta á la cuerda de un círculo, le pueden suceder tres cosas: 1.ª, que pase por el centro: 2.ª, que sea perpendicular á la cuerda: y 3.ª, que la divida en dos partes iguales: digo que si se verifican dos de estas cosas, se verificará la tercera.*

Dem. Supongamos primero que la CP (fig. 40), salga del centro y sea perpendicular á la cuerda FM; digo que divide á la cuerda en dos partes iguales, esto es, que FP=PM.

En efecto, por salir la CP del centro, tiene un punto C equidistante de F y de M; y por ser perpendicular los tiene todos (273 cor. 3.º); luego el punto P que es punto de la CP, está equidistante de F que de M; luego las líneas FP, PM, que miden estas distancias, serán iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si la CP sale del centro y divide á la FM en dos partes iguales, digo que es perpendicular á la FM.

En efecto, por salir la CP del centro, tiene el punto C equidistante de F y de M; y por dividir á la cuerda en dos partes iguales tiene el punto P equidistante de F y de M; luego la línea CP tiene dos puntos C y P equidistantes de los F y M de la FM; luego (274) le será perpendicular. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si la CP divide á la cuerda FM en dos partes iguales, y le es perpendicular, pasará por el centro.

En efecto, por dividir la CP á la FM en dos partes iguales, tiene el punto P equidistante de F que de M; y por serle perpendicular, pasa (274 cor.) por todos los puntos que en dicho plano están á igual distancia de F que de M; y como el centro es uno de estos, se deduce que la CP pasará por él. L. 3.º Q. D. D.

294 Teor. *La línea que cumple con estas circunstancias divide en dos partes iguales al arco que la cuerda subtende.*

Dem. Porque siendo perpendicular, y teniendo un punto equidistante de F y de M, los tendrá todos; luego el punto Q donde la CP vaya á encontrar al arco FQM, tambien estará equidistante de F que de M; luego las cuerdas FQ y QM serán iguales; luego tambien lo serán los arcos F*f*Q, Q*m*M, que es L. Q. D. D.

Esc. Recíprocamente, *si una línea CP sale del centro y divide al arco en dos partes iguales, será perpendicular á la cuerda FM de dicho arco.* Porque por las condiciones con que está tirada, tiene el punto C y el punto Q equidistantes de los estremos F, M, de la cuerda FM.

295 Teor. *Si en un círculo se tiran dos cuerdas paralelas, los arcos que estas interceptan serán iguales.*

Espl. Sean FM y *fm* estas dos paralelas; digo que los arcos F*f*, M*m* son iguales.

Dem. Si desde el centro C tiramos una línea CP perpendicular á una de ellas, lo será igualmente á la otra (180), y dividirá (293 y 294) tanto á ellas como á los arcos FQM, *f*Q*m*, en dos partes iguales, y se tendrá $FfQ=MmQ$, $fQ=mQ$; restando estas ecuaciones será $FfQ-fQ=MmQ-mQ$, ó arco $Ff=Mm$, que era L. Q. D. D.

296 Teor. *Dados tres puntos A, B, C* (fig. 41), *que no estén en línea recta, se puede siempre hacer paser por ellos una circunferencia de círculo.*

Constr. Únanse dichos puntos por medio de las líneas AB, BC, y divídanse estas en dos partes iguales por medio de las perpendiculares EL, KG, las cuales se encontrarán en el punto O, que será el centro.

Dem. En efecto, si no se encuentran, serán parelelas; y en este caso la AB perpendicular á DE, será perpendicular (280) á FG en el punto K; pero BK, prolongacion de AB, es diferente de BF, pues que los tres puntos A, B, C, no están en línea recta; luego tendríamos dos perpendiculares BF, BK, tiradas desde un mismo punto B, á la línea GK, lo que es imposible; luego las perpendiculares DE, FG, se cortarán en un punto tal como O.

Ahora, por pertenecer el punto O á la perpendicular DE, está á igual distancia de los dos puntos A y B; el mismo punto O, por pertenecer á la perpendicular FG, está á igual distancia de los dos puntos B, C; luego las tres distancias OA, OB, OC,

son iguales; luego la circunferencia descrita haciendo centro en O con el radio OB, pasará por los tres puntos A, B, C, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° *Para trazar una circunferencia por tres puntos dados ó por los tres vértices de un triángulo, se aplicará la construccion del teorema.*

Cor. 2.° *Para hallar el centro de un círculo, ó de un arco de circunferencia, se tirarán de un modo cualquiera dos cuerdas AB, BC; se dividirán en dos partes iguales por medio de perpendiculares, y el punto donde se encuentren será el centro.*

297 Cuando una línea corta á la circunferencia de un círculo, teniendo parte dentro y parte fuera, se llama *secante*: tal es la AB (fig. 42).

Y cuando una línea es tal que no tiene mas de un punto comun con la circunferencia, teniendo fuera todo lo demas, aunque se la prolongue, se llama *tangente*: tal es la CE. El punto D, que es comun á la circunferencia y á la tangente, se llama *punto de contacto*.

298 Teor. *Toda línea CE perpendicular al estremo D de un radio, es tangente del círculo.*

Dem. Por ser CE perpendicular á OD, esta lo será á CE (§ 254 cor. 2.°) y se tendrá la oblicua ON > OD; luego el punto N estará fuera del círculo; luego la línea CDE no tiene comun con la circunferencia sinó el punto D; luego es tangente. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *para tirar una tangente por un punto dado en una circunferencia, se tirará el radio correspondiente á dicho punto, y en el estremo de este se levantará una perpendicular.*

299 Teor. *Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

Dem. Por suponerse la CE tangente, todos sus puntos están fuera del círculo, escepto el de contacto D; luego toda línea que desde el centro termine en la CE, es mayor que la OD; luego la OD es la línea mas corta que desde O se puede tirar á la CE; luego (273 1.°) es perpendicular. L. Q. D. D.

De los ángulos considerados en el círculo.

300 Teor. *Si haciendo centro en el vértice de un ángulo, con un radio cualquiera se traza un arco, y se concibe dividido en un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran radios al vértice, los ángulos en que quede dividido el ángulo dado serán iguales.*

Espl. Sea el ángulo COA (fig. 43); digo que si con un radio AO, se traza un arco ABC, y se divide en partes iguales AB, BD, &c. y por los puntos de division B, D, &c. se tiran los radios OB,OD,&c., los ángulos AOB, BOD, &c. serán iguales.

Dem. Doblando la figura por el radio OB, se tendrá (249) que el arco AB caerá sobre el arco BDC; y por ser iguales los arcos AB, BD, el estremo A del primero caerá sobre el estremo D del segundo; luego habiéndose confundido el punto A con el D, las líneas AO, OD, que parten desde un mismo punto O, tambien se habrán confundido (245); luego (251 esc.) los ángulos serán iguales. Como lo mismo se demostraria de los demas, resulta L.Q.D.D.

301 Teor. *Si desde los vértices* O, o, *de dos ángulos* AOC, aoc, *se describen con un mismo radio dos arcos de círculo, la relacion de los arcos comprendidos entre los lados de cada ángulo, será la misma que la de estos ángulos.*

Espl. Aquí pueden ocurrir dos casos: ó que los dos arcos AC, *ac* tengan una comun medida (245 esc.), ó que no la tengan.

Dem. 1.° Si los dos arcos AC y *ac* tienen por comun medida al arco AB=*ab*, colocándola sobre cada uno de ellos tantas veces como se pueda, quedarán divididos ambos en partes iguales; y llamando *m* al número de partes iguales á AB que contiene el arco AC, y *n* al número de partes iguales á *ab*=AB, que contiene el *ac*, se tendrá AC=*m*×AB, *ac*=*n*×AB; y formando proporcion y simplificando

por AB, será $AC:ac::m\times AB:n\times AB::m:n$; ahora, si por los puntos de division se tiran los radios OB, &c. ob, &c., el ángulo AOC quedará dividido (300) en tantos ángulos iguales con AOB, como partes iguales á AB contenia el arco CA, esto es, en m ángulos iguales; y por la misma razon el ángulo aoc quedará dividido en n ángulos iguales á aob=AOB, por lo demostrado (§ 291 cor.); y se tendrá

$$AOC=m\times AOB,\ aoc=n\times aob=n\times AOB;$$

y formando proporcion, será

$$AOC:aoc::m\times AOB:n\times AOB::m:n;$$

y como esta proporcion y la anterior tienen comun la razon $m:n$, resultará (§ 184, 2.ª) $AC:ac:AOC:aoc$. Luego la relacion de los arcos &c.

2.º Si los arcos AC, ac son incomensurables, digo que la relacion de dichos arcos no puede ser mayor ni menor que la de los ángulos, y de consiguiente será igual.

Si se supone (fig. 44) la relacion de los ángulos menor que la de los arcos, ó $AOC:aoc<AC:ac$, para que la segunda razon sea igual con la primera, se necesitará que su consecuente ac crezca, y se convierta v. g. en ad; lo que dará $AOC:aoc::AC:ad$.

En este caso, concibiendo dividido el arco AC en dos partes iguales, y luego en otras dos &c. se llegará á un arco menor que cd, el cual colocado sobre el acd, hará que uno de los puntos de division caiga entre c y d, v. g. en e; con lo cual los ángulos AOC y aoe, guardarán la misma relacion que los arcos comensurables AC, ae, y se tendrá $AOC:aoe::AC:ae$; pero esta proporcion tiene los mismos antecedentes que la anterior, luego (184, 2.ª cor.) los consecuentes darán $aoc:aoe::ad:ae$; pero esto es un absurdo, pues la primera razon $aoc:aoe$ es de menor desigualdad, y la segunda $ad:ae$, es de mayor; luego la relacion de los ángulos no puede ser menor que la de los arcos.

Tampoco puede ser mayor; porque si se supone

$$AOC:aoc > AC:ac,$$

disminuyendo el consecuente de la segunda razon, lo suficiente para que resulte igual con la primera, y suponiendo que se convierta en ad', se tendrá

$$AOC:aoc::AC:ad';$$

y concibiendo dividido como ántes el arco AC en partes iguales, bastante pequeñas, para que colocada una sobre el arco ac las veces que se necesite, caiga un punto de division entre c y d', como en e', se tendrá $AOC:aoe'::AC:ae'$; que (184, 2.ª cor.) dará $aoc:aoe'::ad':ae'$, que es un absurdo, porque una razon es de mayor desigualdad, y otra de menor. Luego si la razon de los ángulos no puede ser menor ni mayor que la de los arcos, deberá ser igual. L. Q. D. D.

302 Por esta razon la *medida de los ángulos* es el arco de círculo comprendido entre sus dos lados, y descrito desde su vértice como centro.

Para entender bien esta medida debe saberse que la circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales, que se llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman *segundos*; cada segundo en 60 *terceros* &c. Los grados se señalan con una o sobre el número, los minutos con un acento, los segundos con dos &c. de manera que $57^{o}17'44''22'''$, quiere decir 57 *grados*, 17 *minutos*, 44 *segundos*, y 22 *terceros*. De consiguiente la medida de un ángulo recto es un cuadrante ó 90^{o}.

303 Teor. *El ángulo formado por una tangente y una cuerda, tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Espl. Sea el ángulo ETA (fig. 45), formado por la cuerda AT y por la tangente EM; digo que tiene por medida la mitad FT del arco TFA que la cuerda AT subtende.

Constr. Tírese el diámetro HF perpendicular á la cuerda AT, el BD paralelo á la misma cuerda, y tírese el radio CT.

Dem. Por ser FH perpendicular á AT, lo será

tambien á su paralela BD (§ 280); luego el ángulo FCD es recto; el ángulo ETC tambien es recto (299), luego (253) será FCD=FTC.

Ahora, el ángulo $o=p$, por alternos internos entre las paralelas AT, BD, siendo CT la secante; luego restando estas ecuaciones, se tendrá

$$FCD-o=ETC-p, \text{ ó } n=ETA;$$

que por tener n su vértice en el centro del círculo, tiene por medida al arco FT; luego el ángulo ETA que es su igual, tendrá la misma medida FT, que es L. Q. D. D.

Esc. Como entre los dos ángulos ETA, ATM, han de valer dos rectos, el valor del ángulo ATM será lo que le falte á la mitad de AFT para la semicircunferencia, ó su medida será la mitad del arco ABHT; luego ya se considere el arco mayor ó el menor que la cuerda subtende, se verifica la proposicion.

304 Teor. *El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, formado por el concurso de dos cuerdas, tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus dos lados.*

Espl. Sea el ángulo DTE (fig. 46), cuyo vértice T está en la circunferencia, formado por las dos cuerdas TE, TD; digo que tiene por medida la mitad del arco ED que sus dos lados abrazan.

Dem. Porque si en T se tira la tangente AT, los tres ángulos ATD, DTE, ETB, valdrán juntos la mitad de la circunferencia TEDM; pero el ATD tiene por medida la mitad de TMD, y el BTE la mitad de TE; luego el DTE tendrá por medida la mitad de DE, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.º Si se unen los puntos D y E con el centro C, el ángulo DCE tendrá por medida todo el arco DE, y DTE su mitad; luego será DCE=2DTE. Al ángulo DCE, por tener su vértice en el centro, se le llama ángulo *central*, y al DTE, por tener su vértice en la circunferencia, se le llama ángulo *inscrito*; luego *el ángulo central es duplo del ángulo inscrito.*

Cor. 2.° *Todos los ángulos BAE, BCE, BDE* (fig. 47), *que tienen sus vértices en la circunferencia é insisten sobre un mismo arco BE, son iguales*; porque todos tienen por medida la mitad del arco BE.

Cor. 3.° *Todo ángulo ACB* (fig. 48), *cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados pasan por los estremos de un diámetro AB, es recto*; porque tiene por medida la mitad del arco AEB, que es un cuadrante.

Cor. 4.° *Todo ángulo ACD, cuyo vértice esté en en la circunferencia y abrace un arco mayor que la semicircunferencia, será obtuso*; porque la mitad de este arco será mayor que un cuadrante; y *todo ángulo ACE, cuyo vértice esté en la circunferencia y sus lados abracen un arco menor que la semicircunferencia, es agudo*; porque su mitad será menor que un cuadrante.

305 Prob. *En el estremo B de una línea AB* (fig. 49) *que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en un punto cualquiera C, trácese una circunferencia que pase por B, y que ademas corte en otro punto cualquiera A á dicha línea. Por este punto tírese el diámetro AD; únase el estremo D de dicho diámetro con el B por medio de la BD; y esta será la perpendicular pedida. Porque el ángulo ABD es recto (304 cor. 3.°), y por lo mismo la BD perpendicular á la AB.

306 Probl. *Dado un punto A* (fig. 50) *fuera de un círculo DEB, tirarle una ó dos tangentes.*

Res. y *Dem.* Únase dicho punto A con el centro C del círculo, por medio de la AC; sobre esta línea como diámetro, trácese una circunferencia; desde el punto dado tírense á los puntos de interseccion D, B, las líneas AD, AB, las cuales serán las tangentes pedidas. Porque tirando los radios CD, CB, los ángulos ADC, ABC, que tienen su vértice en la circunferencia del círculo BDA, y cuyos lados pasan por los estremos del diámetro AC, serán rectos; y por lo mismo la AD será perpendicular á

DC, y la AB á CB; y como DC, CB son radios del círculo dado DEB, resulta que las AD, AB, perpendiculares á estos radios, son tangentes de dicho círculo.

De las figuras en general, y propiedades de los cuadriláteros.

307 Se llama *figura* el espacio terminado por líneas. En la idea de figura entran estas dos: la del espacio cerrado, que se llama *área* ó *superficie*, y la de las líneas que le cierran, que se llama *contorno* ó *perímetro*. Las figuras terminadas por rectas, se llaman *rectilíneas*; las terminadas por una ó muchas curvas, *curvilíneas*; y las que por líneas rectas y curvas, *mistilíneas*.

Cuando dos figuras tienen sus perímetros de igual estension, se llaman *isoperímetras*; cuando sus superficies son iguales, se dice que son *equivalentes*; y cuando son tales que superpuesta la una á la otra se confunden exactamente, se llaman *iguales*.

Se dice que una figura está *inscrita* en un círculo, ó que un círculo está *circunscrito* á una figura cuando todos sus ángulos están en la circunferencia de dicho círculo, como ABDC (fig. 51).

Cuando una figura es tal que todos sus lados son tangentes de un círculo, se dice que está *circunscrita* al círculo, ó que el círculo está *inscrito* en la figura: tal es la ABCDE (fig. 52).

En general se llama *base* de una figura al lado sobre que se considera insistiendo; *altura*, la perpendicular bajada á la base, desde el punto de la figura que diste mas de la base; y se llama *diagonal* toda línea AD (fig. 52), que desde un ángulo va á parar á otro no inmediato.

308 De esto y de lo dicho (270 y 271) se deduce, 1.º *que el perímetro de una figura inscrita en una curva, es menor que la misma curva*: 2.º *de dos figuras inscritas en una curva, la que tenga mayor número de lados tiene mayor perímetro*: 3.º *el perímetro de*

toda figura circunscrita á una curva, es mayor que la misma curva: *y* 4.° *de dos ó mas figuras circunscritas á una curva, la que tenga mayor número de lados tiene menor perímetro*; pues aquí llamamos perímetro á lo que allí conjuntos de líneas.

309 Cuando una figura está terminada por cuatro líneas, se llama *cuadrilátero*. Si de estas cuatro líneas ninguna es paralela á otra, la figura se llama *trapezoide*, como ABCD (fig. 53); cuando dos son paralelas entre sí, como AD, BC (fig. 54), se llama *trapecio*; y *paralelogramo*, cuando las cuatro líneas son paralelas de dos en dos.

Hay cuatro especies de paralelogramos: primero, cuando los ángulos A y D (fig. 55) adyacentes á un mismo lado AD, y los lados AB, AD que forman un mismo ángulo, son desiguales, el paralelogramo se llama *romboide*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son desiguales, é iguales los lados que forman un mismo ángulo, como ABCD (fig. 56), se llama *rombo*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son iguales, y los lados que forman un mismo ángulo desiguales, como en la (fig. 57), se llama *rectángulo*; y cuando los lados que forman un mismo ángulo son iguales, y los ángulos adyacentes á un mismo lado tambien son iguales, como se ve en ABCD (fig. 58), se llama *cuadrado*.

Se llama *base* de un paralelogramo el lado sobre que se considera insistiendo, y la perpendicular á la base ó á su prolongacion, desde el lado opuesto, se llama *altura*; así, BE es la altura de los paralelogramos ABCD (figs. 55 y 56), cuando se considera por base el lado AD. En un trapecio se llaman *bases* los dos lados paralelos; y *altura* la perpendicular tirada desde uno de ellos al otro.

310 Teor. *Los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen* 2π *ó cuatro rectos.*

Dem. Porque (figs. 53, 54 y 55), tirando la diagonal AC quedará dividido en dos triángulos, cuyos ángulos valen lo mismo que los del cuadrilátero; y

como los ángulos de cada triángulo valen π, los del cuadrilátero valdrán 2π ó cuatro rectos. L. Q. D. D.

311 Teor. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, será un paralelogramo.*

Espl. Si los dos lados AB, CD del cuadrilátero ABCD (fig. 59), son iguales y paralelos, los otros dos lados AD, BC, tambien lo serán, y la figura será un paralelogramo.

Dem. Si se tira la diagonal AC, se tendrán dos triángulos BAC, DAC, que tienen AB=CD por el supuesto; el lado CA comun, y el ángulo $m=n$, por alternos internos entre las paralelas AB, CD y la secante AC; luego son iguales (260); luego AD=BC, y el ángulo $p=q$; pero estos son alternos internos entre las líneas AD, BC, cortadas por otra AC, luego dichas líneas serán paralelas (281), y la figura un paralelogramo. L. Q. D. D.

312. Teor. *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero será un paralelogramo.*

Espl. Si en el cuadrilátero ABCD, se supone

AD=BC, y BA=CD,

digo que AD será paralela á BC, y BA á CD, y la figura un paralelogramo.

Dem. Porque tirando la diagonal AC, los triángulos ABC, ADC serán iguales (259); luego el ángulo $m=n$, y $p=q$; la primera ecuacion da que CD es (281) paralela á BA, y la segunda que AD lo es á BC; luego la figura es un paralelogramo. L. Q. D. D.

313 Si aplicamos aquí lo demostrado (286), y se sustituye el lenguaje de *paralelogramo*, *lados*, &c. se tendrá: primero, que *la diagonal de un paralelogramo le divide en dos triángulos iguales.* Segundo. *En todo paralelogramo son iguales los lados y ángulos opuestos.* Tercero. *Dos ángulos A, D, contiguos á un mismo lado de un paralelogramo, son* (284, 4.º) *el uno suplemento del otro.* Cuarto. *Si uno de los ángulos es recto, lo son todos.* Quinto. *Si dos lados contiguos de un paralelogramo son iguales, lo son todos los demas.*

314 *Si dos paralelogramos tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, serán iguales*; pues los otros dos lados lo serán por opuestos á los dados; y los ángulos serán opuestos igual al dado, y los adyacentes tambien serán iguales por ser suplementos suyos.

Ademas puede observarse que si por la parte superior ó inferior de la AD, y por la derecha ó izquierda de la AB, se tirasen varias líneas, y por el punto C se tirasen paralelas respectivamente á dichas líneas, resultarian una porcion de paralelogramos, que todos tendrian una misma diagonal AC.

De los polígonos.

315 Una figura terminada por mas de cuatro líneas se llama *polígono*; si está terminada por cinco lados, se llama *pentágono*; si por 6, *exágono*; si por 7, *eptágono*; si por 8, *octógono*; si por 9, *eneágono*; si por 10, *decágono*; si por 11, *endecágono*; si por 12, *dodecágono*. Cuando ocurre nombrar un *polígono* de mas lados, se dice *polígono de* 16, *de* 20, *de* 30 *lados*.

Un polígono es *regular* cuando tiene iguales todos sus ángulos y todos sus lados, como ABDEF (fig. 60); y es *irregular* cuando le falta alguna de estas circunstancias, como ABCDEF (fig. 61).

Se llama *ángulo saliente* de un polígono, aquel cuyo vértice mira hácia fuera de la figura, como los A, B; y *ángulo entrante*, aquel cuyo vértice mira hácia dentro de la figura como el D.

Cuando el polígono es regular hay un punto dentro, tal que todas las líneas que desde él se tiran á los ángulos, son iguales; este punto se llama el *centro* del polígono, y las líneas tiradas *radios oblicuos*; y se llaman *radios rectos* las perpendiculares tiradas desde el centro á los lados; y en un polígono se llama *sajita* á la diferencia entre el radio oblicuo y el radio recto.

316 Teor. *La suma de todos los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono ménos dos.*

Dem. Porque si desde uno de los ángulos A (fig. 61) se tiran diagonales, quedará dividido el polígono en tantos triángulos como lados tiene ménos dos; pero los ángulos de estos triángulos componen los del polígono; luego los ángulos de este valen tanto como los de los triángulos; y como los de cada triángulo valen dos rectos, se deduce L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego llamando π á dos ángulos rectos ó á 180° y n al número de lados, $(n-2)\pi$ *será la espresion del valor de todos los ángulos de un polígono.*

Cor. 2.° Como en un polígono regular todos los ángulos son iguales, y hay tantos como lados, para hallar el valor de uno se dividirá el valor de todos que es $(n-2)\pi$, por n que es tambien el número de ángulos, y se tendrá:

$$\text{Ángulo de polígono regular} = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Esc. La fórmula anterior da á conocer que el ángulo de un polígono regular siempre es menor que π; porque para obtener su valor, se ha de multiplicar π por el quebrado propio $\frac{n-2}{n}$.

Sustituyendo 3, 4, 5, &c. en vez de n, se tendrán los ángulos de los polígonos regulares siguientes, que es muy útil saber de memoria.

Ángulo de triángulo equilátero $=60°$;
Ángulo de cuadrado $=90°$,
Ángulo de pentágono regular $=108°$;
Ángulo de exágono regular $=120°$.

317 Teor. *Si se dividen los ángulos de un polígono regular en dos partes iguales por medio de líneas, estas se encontrarán en un mismo punto y serán iguales.*

Espl. Si los ángulos A, B, D, &c. (fig. 60), se di-

viden en dos partes iguales por medio de las líneas AC, BC, DC, &c., digo que estas se encontrarán en un mismo punto C y serán iguales.

Dem. Pues que (316 esc.) el ángulo FAB<180°, su mitad CAB valdrá ménos de 90°; por la misma razon ABC valdrá ménos de 90°; luego será

$$CAB+ABC < 180°;$$

luego las líneas AC, BC se encontrarán (287) en un punto tal como C. Y como los ángulos CAB, CBA, son iguales por ser mitades de los iguales FAB, ABD, el triángulo ACB será isósceles y dará AC=CB.

Del mismo modo se demostrará que la DC encontrará á la BC; pero falta probar que la DC encontrará á la BC en el mismo punto en que la AC encuentra á la BC. Para esto observarémos que los triángulos CAB, BCD tienen iguales los lados AB, BD, é iguales los ángulos adyacentes á estos lados, por ser mitades de los ángulos A, B, D, &c. del polígono; luego serán iguales, y se podrán superponer; luego podrémos concebir que el triángulo DCB se doble por la BC, de modo que BD caiga sobre BA, en cuyo caso DC se confundirá con AC, é irán por consiguiente á encontrar á la BC en un mismo punto C.

Como lo mismo se demuestra de todas las demas, resulta que todas se encontrarán en C, y que

$$AC=BC=DC=\&c. \text{ que es L. Q. D. D.}$$

Cor. 1.° Luego *el punto C será el centro del polígono, y las líneas AC, BC, DC, &c. los radios oblicuos*; de manera que *en todo polígono regular son iguales los radios oblicuos.*

Cor. 2.° Luego *los triángulos CAB, CBD, CDE, &c. son isósceles é iguales entre sí*; porque tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Cor. 3.° Si desde el centro se tirán las perpendiculares CP, CQ, &c. á los lados de dicho polígono, serán los radios rectos; y como los triángulos ACQ, ACP, tienen el lado AC comun, el ángulo CAP=CAQ por mitades de FAB, y el P=Q por rectos, resulta (273 cor. 2.°) que son iguales, y

dan CP=CQ; luego *en un polígono regular todos los radios rectos son iguales.*

Cor. 4.° *El radio recto de un polígono regular divide al lado correspondiente en dos partes iguales;* porque (265 esc.) los triángulos FCA, ACB, &c. son isósceles.

Cor. 5.° Si desde el centro de un polígono regular y con el radio oblicuo, se traza una circunferencia, esta pasará por todos los ángulos del polígono, y por consiguiente *el círculo quedará circunscrito al polígono.*

Cor. 6.° Si desde el centro del polígono se traza una circunferencia con un radio igual al radio recto (fig. 62), esta pasará por los estremos de todos ellos; y siendo cada lado perpendicular al radio recto, que se ha convertido en radio del círculo, *este quedará inscrito en el polígono.*

Esc. al cor. 5.° *y* 6.° Debe observarse que *radio oblicuo de un polígono inscrito en un círculo, y radio de un círculo circunscrito á un polígono, es una misma cosa; y que radio recto de un polígono circunscrito á un círculo, y radio de un círculo inscrito en un polígono, es tambien una misma cosa;* ó mas general, *el radio oblicuo de todos los polígonos que se pueden inscribir en un círculo, es el mismo que el del círculo en que lo están; y el radio recto de todos los polígonos que se pueden circunscribir á un círculo, es el mismo que el del círculo á que lo están.*

Cor. 7.° Como todos los triángulos ACB, BCD, &c. (fig. 60) son iguales, los ángulos ACB, BCD, &c. formados en el centro, serán iguales; y como en virtud de lo espuesto (254 cor. 3.°) todos valen 360° ó 2π, y hay tantos como lados, resulta que

$$\text{áng. del centro de un políg. reg.} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Cor. 8.° *El lado del exágono es igual al radio del círculo circunscrito;* porque los triángulos ACB, BCD, &c. (fig. 63) que, en todos los polígonos regu-

lares son isósceles, en el exágono son equiláteros, por ser equiángulos; pues siendo ABD=120°, su mitad CBA valdrá 60°, y tambien CAB=60°; luego el ACB=60°; luego CA=AB.

Cor. 9.° Luego *para inscribir un exágono en un círculo basta colocar el radio seis veces sobre la circunferencia, y tirar líneas por los puntos de division A, B, D, &c.* Si ahora se quiere inscribir un triángulo equilátero, *se unirán de dos en dos los estremos de los lados, con las líneas AD, DF, FA.*

Cor. 10.° *Y si se quisiese un arco de* 30°, *se dividiria* (294) *en dos partes iguales el arco AB correspondiente á una cuerda igual al radio.*

318 Para inscribir un cuadrado se tirarán dos diámetros AB, CD (fig. 64), que se crucen á ángulos rectos, y se unirán sus estremos por las cuerdas AC, AD, DB, BC.

Si se levantan en A, B, C, D perpendiculares á los radios OA, OB, OC, OD, *se tendrá circunscrito el cuadrado MNPQ*: en el cual por ser cada lado, v. g. MN igual (313, 2.°) al diámetro AB, se tendrá que *el perímetro del cuadrado circunscrito vale cuatro diámetros.*

Ahora, por ser el lado del exágono igual al radio del círculo circunscrito, *su perímetro valdrá seis radios ó tres diámetros*; pero la circunferencia es mayor (308) que el perímetro de cualquier figura inscrita, y menor que el de la circunscrita; luego *la circunferencia es menor que cuatro diámetros y mayor que tres, ó está entre tres y cuatro diámetros.*

De las líneas proporcionales.

319 Teor. *Si en una línea que con otra forma un ángulo cualquiera, se toma un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran paralelas entre sí, hasta que encuentren á la otra, y por estos puntos de concurso se tiran paralelas á la primera: cada una de estas líneas quedará dividida en partes iguales entre sí.*

Espl. Si en la AV (fig. 65) que con la AZ forma un ángulo cualquiera VAZ, se toma

AB=BC=CD=&c.:

por los puntos de division B, C, D, &c. se tiran las BF, CG, &c. paralelas entre sí: y por los puntos F, G, H, &c. donde estas encuentran á la AZ, se tiran las FS, GT, &c. paralelas á la primera AV: digo que las partes AF, FG, GH, &c. de la AZ, serán iguales; y que tambien lo serán las de las líneas FS, GT, &c., y las de CG, DH, &c.

Dem. Por el supuesto se tiene AB=BC;

pero BC=FK por lados opuestos del paralelogramo BCKF, luego AB=FK.

El ángulo FKG=ABF (§ 288):

el BAF=KFG, por correspondientes entre las paralelas AV, FS, siendo la secante AZ;

luego (261) los triángulos BAF, KFG, serán iguales y darán AF=FG.

Del mismo modo se demostrará que el triángulo

FKG=GNH=HPQ=&c.;

luego AF=FG=GH=HQ=&c.

Ahora, FK=BC por lados opuestos de paralelogramo; y por la misma razon KL=CD, LM=DE, &c.; pero BC=CD=DE=&c. por el supuesto, luego FK=KL=LM=&c.

Para demostrarlo respecto de las CG, DH, &c., observarémos que CK=BF por lados opuestos de paralelogramo; BF=KG por la igualdad de los triángulos ABF, KFG; luego CK=KG.

Ahora, DL=CK y LN=KG, por lados opuestos de paralelogramo; pero CK=KG por lo acabado de demostrar, luego DL=LN; y como KG=NH por la igualdad de los triángulos FKG, GNH, resulta tambien que DL=LN=NH, que era todo L. Q. D. D.

Cor. Puesto que AB=BC=&c. y AF=FG=&c. resultará que la razon que tenga AB con AF, esa misma tendrá BC con FG, &c.;

luego AB:AF::BC:FG::CD:GH::&c.:&c.;

y multiplicando los dos términos de la primera ra-

zon por una misma cantidad, se tendrá

AB:AF::2AB:2AF::3AB:3AF::4AB:4AF::
n×AB:n×AF::m×AB:m×AF::&c.:&c.

Esto quiere decir, que *un número cualquiera* n *de partes de la primera es al mismo número de partes de la segunda, como otro número cualquiera* m *de partes de la primera es á este mismo número de partes de la segunda*: ó alternada dirá: *un número cualquiera* n *de partes de la primera es á otro número cualquiera* m *de partes de la misma, como el número* n *de partes de la segunda es al número* m *de partes de la misma*; de manera que se tendrá esta serie de razones iguales

AB:AF::BC:FG::CD:GH::DE:HQ::AC:AG::
BD:FH::CE:GQ::AD:AH::&c.:&c.

320 Teor. *Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á la base, los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes proporcionales.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. *66*); digo que si desde un punto cualquiera D de uno de los lados, se tira una línea DE paralela á la base, esta línea dividirá á los lados BA, BC en partes porporcionales de modo que se tendrá BA:BD::BC:BE.

Dem. Aquí pueden ocurrir dos casos: 1.° que BA sea comensurable con BD, y 2.° que no lo sea.

En el primer caso sea la comun medida de BA y BD la AP; y representando por m el número de veces que está contenida en BA, y por n las que está contenida en BD, se tendrá AB=m×AP, BD=n×AP; y formando proporcion y simplificando por AP, será

AB:BD::m×AP:n×AP::m:n;

pero si por los puntos de division P se tiran líneas paralelas á la AC tales como la PQ, el lado BC quedará dividido (319) en m partes iguales con CQ, y la línea BE en n, y se tendrá BC=m×CQ, BE=n×CQ; de donde BC:BE::m×CQ:n×CQ::m:n; luego esta proporcion y la anterior (184, 2.ª) darán AB:BD::BC:BE.

2.° Si BA y BD son incomensurables, digo que la razon de BA:BD no puede ser mayor ni menor que la de BC:BE.

En efecto, no se puede suponer BA:BD::BC:BL, siendo BL < BE; porque en este caso concibiendo la BA dividida en partes iguales, tan pequeñas que tirando paralelas á AC por los puntos de division, caiga una de estas tal como *de*, entre E y L, á causa de la comensurabilidad de BA con B*d*, se tendrá

BA:B*d*::BC:B*e*.

Cuya proporcion y la anterior dará (§ 184, 2.ª cor.) BD:B*d*::BL:B*e*, resultado absurdo; porque la una razon es de mayor desigualdad, y la otra de menor.

Tampoco se puede suponer que BA:BD::BC:BL′, siendo BL′ > BE; porque concibiendo dividida la BA en partes tan pequeñas como se necesite, para que una de las paralelas tal como *d′e′*, tiradas á la base AC por los puntos de division, caiga entre E y L′, se tendrá BA:B*d*::BC:B*e*′;

y formando proporcion con los consecuentes de estas dos proporciones, será BD:B*d*′::BL′:B*e*′, resultado absurdo por la misma razon que ántes; luego no pudiendo ser la razon BA:BD > ni < BC:BE, será BA:BD::BC:BE, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° Dividiendo esta proporcion tendrémos

BA—BD:BD::BC—BE:BE, ó DA:BD::CE:BE,

la cual compuesta y alternada, se convierte en

DA+BD=BA:CE+BE=BC::BD:BE::DA:CE;

que nos manifiesta que *los lados del triángulo son proporcionales con las partes superiores é inferiores á la paralela, y estas proporcionales entre sí.*

Cor. 2.° De aquí se sigue tambien que *si tres paralelas AC, DE, de, se cortan por dos secantes Ad, Ce, estas y las partes en que quedan divididas por la paralela DE, serán proporcionales entre sí*; de manera que se tendrá A*d*:C*e*::AD:CE::D*d*:E*e*,

ó A*d*:AD:D*d*::C*e*:CE:E*e*.

Porque concibiendo prolongadas las secantes hasta que se encuentren en B, el triángulo BAC nos

dará $Bd:Be::Ad:Ce$; y el BDE dará $Bd:Be::Dd:Ee$; por lo que (184, 2.ª) será $Ad:Ce::Dd:Ee$; y (184, 4.ª) $Ad-Dd:Ce-Ee::Ad:Ce::Dd:Ee$; que reduciendo y permutando resulta

$$Ad:Ce::AD:CE::Dd:Ee,$$

ó (§ 185) $Ad:AD:Dd::Ce:CE:Ee$.

321 Teor. *Si una recta divide los lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela á la base.*

Espl. Sea el triángulo BAC (fig. 67); digo que si la DE divide los lados BA, BC, de modo que se tenga BA:BD::BC:BE, la línea DE será paralela á la base AC.

Dem. Si la DE no es paralela á la AC, se le podrá tirar por el punto D una línea que lo sea. Si esta fuese la De, se tendria (§ 320) BA:BD::BC:Be; y como esta proporcion y la del supuesto tienen los tres primeros términos comunes, resulta BE=Be, que es absurdo, porque BE es todo y Be parte suya; luego la paralela á la base no puede caer por mas arriba de la DE. Tampoco puede caer por la parte inferior; porque si se supone que la De' es paralela á la AC, resultará BE=Be', que tambien es absurdo; luego si la paralela tirada por el punto D á la base AC, no puede pasar ni por mas arriba ni por mas abajo de la DE, esta será la paralela. L. Q. D. D.

322 Teor. *La DE, que es paralela á la base, es tambien proporcional con la misma base; de manera que se tiene BA:BD::AC:DE.*

Dem. Tirando por D la DF paralela á BC, tendrémos (320 cor. 1.º) BA:BD::AC:CF; pero DE=FC por ser lados opuestos del paralelogramo DFCE; luego BA:BD::AC:DE, que era L. Q. D. D.

Esc. *Si por un punto E, dentro de un ángulo BAC* (fig. 67), *quisiéramos tirar una recta BEC; de modo que BE=EC;* tiraríamos ED paralela á CA, tomaríamos DB=DA, y tirando BEC resultaria (320) BE=EC.

323 Probl. *Dividir una línea dada AG* (fig. 68)

en las partes iguales que se quiera, v. g. en ocho.

Res. y *Dem.* Tírese por uno de sus estremos A una línea cualquiera AQ; tómense en esta ocho partes iguales á una magnitud arbitraria, tal como AB; únase el estremo F de la octava division con el G de la línea propuesta; y por todos los puntos de division tírense paralelas á la FG, las cuales dividirán á la AG en las ocho partes iguales que se deseaba (319).

Esc. Si se quisiera dividir la línea en dos (ó mas) partes que tuviesen una razon dada, como de 3 á 5, se dividiria la línea AG en 8 partes por el método anterior; y la línea DE tirada por el punto que señale uno de los números dados paralela á GF, dividirá la AG en las dos partes AE, EG, que serán como 3:5 (§ 320 cor. 1.°).

324 Probl. *Dadas tres líneas G, K, L* (fig. 69), *hallarles una cuarta proporcional geométrica.*

Res. y *Dem.* Fórmese un ángulo cualquiera VAZ con dos líneas indefinidas AV, AZ; en uno de los lados AV tómese una parte AB= con la 1.ª G; en el mismo lado tómese otra parte AC= con la 2.ª K; en el otro lado AZ tómese una parte AE= á la 3.ª L; únase el estremo B de la primera con el E de la tercera por medio de la BE, y por el estremo C de la segunda tírese la CF paralela á BE, la cual irá á encontrar al otro lado, de manera que la parte AF será la cuarta proporcional pedida. Porque el triángulo ACF (§ 320) da AB:AC::AE:AF,
ó sustituyendo á estas líneas sus iguales, G:K::L:AF.

Esc. *Si solo se diesen las dos líneas G, K, y se pidiese una tercera proporcional geométrica*, se emplearia la misma construccion sin mas diferencia que tomar AE=AC=K.

325 Probl. *Formar la escala universal que se conoce con el nombre de escala de mil partes.*

Res. y *Dem.* Tómese una magnitud arbitraria K (fig. 70), y repítase diez veces sobre la AB desde A hasta O; tómese toda la magnitud AO=10K, y repítase nueve veces desde O hácia la derecha; en los

estremos levántense perpendiculares, en las cuales se tomarán tambien diez partes iguales con otra magnitud arbitraria, y se tirarán líneas por los puntos de division 1, 2, 3, &c. que serán paralelas é iguales (311) á la AB; y en la última CE fórmense las mismas partes que en la AB.

Desde D á C y desde O á A, póngase 10, 20, 30, &c. en las divisiones 1.ª, 2.ª &c.; únase el punto O con el 10 de la de arriba; el 10 de la AO con el 20 de la de arriba; y así sucesivamente hasta unir el punto 90 de la de abajo con el C de la de arriba; únase tambien el punto O con el D, y en los puntos de division de la derecha se pondrán, tanto arriba como abajo, 100, 200, 300, &c.; con lo cual quedará formada la escala.

En ella se podrán tomar hasta mil partes, de esta manera: considerando que la distancia A90 vale diez partes, la AO valdrá 100; y como AB=10AO, se sigue que la AB que es la mayor magnitud que es puede tomar, valdrá mil partes.

Esc. 1.º Ahora, para tomar un número cualquiera de partes menor que mil, se procederá del modo siguiente. En primer lugar *esta distancia se debe tomar en la paralela á AB que pase por el punto que espresa el guarismo de las unidades del número propuesto; y la magnitud estará espresada por la parte de esta línea que hay interceptada entre la línea que espresa las centenas, y la que va desde las decenas de abajo á una decena mas de la de arriba.* Así, si se quieren tomar 237 partes, se echará de ver que esta distancia se debe tomar en la línea 7F, y estará representada por la parte HN, interceptada entre la línea 200 que espresa las centenas, y la que desde el 30 de la de abajo que espresa las decenas, va al 40 de la de arriba.

Porque $NH=Hm+mr+rN$; ahora, Hm es igual á 200, y por consiguiente vale 200 partes; la $Nr=O30$, tambien por lados opuestos del paralelogramo $NrO30$, y por consiguiente vale 30 de estas partes; y la rm

por lo que ahora probarémos vale 7 de dichas partes; luego $NH=200+30+7=237$ partes.

Para probar que rm vale 7 partes, se observará que el triángulo OD10, por ser la rm paralela á D10, da $rm:D10::Om:OD::7\times Ot:10\times Ot::7:10$;

luego $rm=\frac{D10\times 7}{10}$;

y como la distancia D10 la suponemos compuesta de diez partes, resulta que $rm=\frac{10\times 7}{10}=7$.

Esc. 2.° Es muy importante el conocimiento de la escala, pues es lo primero que se ha de hacer para delinear todo plano, y es la que en los mismos planos y mapas sirve para conocer la distancia de dos puntos.

De la semejanza de las figuras.

326 Se llaman figuras *semejantes* las que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; y *desemejantes*, aquellas á que falta alguna de estas dos circunstancias. De modo que las dos figuras ABCDE, *abcde* (fig. 71) serán semejantes, siempre que sus ángulos sean $A=a$, $B=b$, $C=c$, &c. y ademas se tenga $AB:ab::BC:bc::CD:cd::$&c.:&c.

327 Teor. *Todos los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.*

Dem. Porque siendo en ambos uno mismo el número n de lados, la fórmula (§ 316 cor. 2.°) $\frac{(n-2)\pi}{n}$ dará un mismo valor para cada ángulo; luego los ángulos del uno serán iguales á los del otro; y como en cada uno han de ser iguales los lados entre sí, resulta que la razon que uno de ellos tenga con otro, esa será la que tengan otros dos cualesquiera. Luego serán semejantes. L. Q. D. D.

328 Teor. *Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á uno de los otros lados, se orijinará un triángulo que será semejante al primitivo.*

Espl. Si por el punto b' del lado AB (fig. 72), se tira la $b'c'$ paralela á BC, el triángulo $Ab'c'$ será semejante al ABC.

Dem. Ambos triángulos tiene comun el ángulo en A; el ángulo en b'= al en B por correspondientes; el en c'= al en C, por la misma razon; luego son equiángulos. Ahora, el triángulo ABC nos da (§ 320 y 322) $AB:Ab'::AC:Ac'::BC:b'c'$.

Luego estos dos triángulos tienen los ángulos iguales, y proporcionales los lados; luego son semejantes. L. Q. D. D.

329 Teor. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus tres lados proporcionales.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, *abc*, en que se supone $AB:ab::AC:ac::BC:bc$;
digo que los ángulos serán a=A, b=B, c=C, y por lo mismo los triángulos serán semejantes.

Constr. Tómese en el lado AB una parte $Ab'=ab$, y en AC una parte $Ac'=ac$, y únase el punto b' con el c'.

Dem. Por el supuesto tenemos $AB:ab::AC:ac$; luego sustituyendo en vez de *ab* y *ac* sus iguales Ab', Ac', será $AB:Ab'::AC:Ac'$;
luego (321) la $b'c'$ será paralela á la base, y proporcional (322) á la misma base; luego $AB:Ab'::BC:b'c'$; y como $ab=Ab'$, esta proporcion y la del supuesto tienen los tres primeros términos iguales; luego el cuarto será igual en ambas, y se tendrá $b'c'=bc$; luego los triángulos $Ab'c'$, *abc* son iguales (259); y como $Ab'c'$ es semejante (328) al ABC, resulta que su igual *abc* tambien será semejante á ABC, que era L. Q. D. D.

330 Teor. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados proporcionales.*

Espl. Sean ABC, *abc* dos triángulos, en que se supone A=*a*, y AB:*ab*::AC:*ac*; digo que son semejantes.

Dem. Hecha la construccion anterior resulta que si en la proporcion del supuesto sustituimos en vez de *ab*, *ac*, sus iguales A*b'* y A*c'*, se tendrá

AB:A*b'*::AC:A*c'*;

luego la *b'c'* divide en partes proporcionales los lados del triángulo ABC, y por lo mismo será paralela á la base; luego (328) el triángulo A*b'c'* es semejante al ABC; y como *abc* es igual (260) con A*b'c'*, resulta que *abc* será semejante á ABC, que es L. Q. D. D.

331 Teor. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.*

Espl. Sean dos triángulos ABC, *abc*, en que se supone A=*a*, B=*b* y C=*c*; digo que son semejantes.

Constr. Tómese en AB una parte A*b'* igual con *ab*, y por *b'* tírese la *b'c'* paralela á BC.

Dem. El ángulo *b'*=B por correspondientes; y como B=*b* por el supuesto, será *b'*=*b*; luego los dos triángulos A*b'c'*, *abc* son iguales (261); pero A*b'c'* es semejante con ABC, luego *abc* tambien lo será, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° *Cuando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, los triángulos son semejantes*; porque en este caso el tercer ángulo es igual al tercero.

Cor. 2.° *Dos triángulos rectángulos son semejantes, siempre que ademas del ángulo recto tengan otro igual ó comun.*

Cor. 3.° *Dos triángulos ABC, DEF* (fig. 73), *son semejantes cuando tienen sus lados paralelos*; porque si AB es paralelo á DE y BC á EF, el ángulo B=E (§ 288); y ademas por ser AC paralelo á DF será igualmente el ángulo C=F y A=D.

Cor. 4.° *Dos triángulos DEF, ABC* (fig. 74), *son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares*; porque dando á uno de ellos un cuarto de conversion (lo que no altera el triángulo) resultarian sus lados paralelos á los del otro.

Esc. 1.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen proporcionales un cateto y la hipotenusa.*

En efecto, si suponemos rectángulos en B y en b (fig. 72) los triángulos ABC, abc, y que AB:AC::ab:ac, será semejantes; porque tomando $Ab'=ab$ y $Ac'=ac$, la proporcion se convertirá en AB:AC::Ab':Ac'; luego si unimos el punto b' con c' por medio de la $b'c'$, esta será (321) paralela á BC; y como el ángulo B es recto por el supuesto, tambien lo será (284. 3.º) el b'; luego (273 cor. 2.º) los triángulos $Ab'c'$, abc serán iguales; pero $Ab'c'$ es semejante (328) al ABC; luego tambien lo será abc, que era L. Q. D. D.

Esta proposicion se verifica aun con mas generalidad en esta forma.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Espl. Sean los dos triángulos ABC, abc (fig. 72) en que se supone AB:ab::AC:ac, ABC$=abc$, sabiendo ademas que el lado AC es mayor que AB; voy á demostrar que son semejantes.

Dem. Tómese en AB una parte $Ab'=ab$ y en AC, una parte $Ac'=ac$; únase b' con c' por medio de la $b'c'$, y tendrémos que sustituyendo en la proporcion del supuesto en vez de ab y ac, sus valores Ab', Ac', será AB:Ab'::AC:Ac'; luego la $b'c'$ divide en partes proporcionales á los lados del triángulo ABC; y por lo mismo será (321) paralela á la base; luego el triángulo $Ab'c'$; es semejante (328) al ABC; y como el triángulo abc es igual (273 cor. 4.º) con el $Ab'c'$ (por tener $ab=Ab'$, $ac=Ac'$ por construccion y $abc=Ab'c'$; porque de ser la $b'c'$ paralela á la base BC, se deduce que el ángulo $Ab'c'=$ABC$=abc$ por el supuesto), resulta que el triángulo abc tambien será semejante al triángulo ABC.

Esc. 2.º *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al lado menor de los dos dados y que sean de una mis-*

ma especie los ángulos opuestos al lado mayor de los dos que se dan.

Espl. Sean ABC, *abc* dos triángulos en que se tiene AC:*ac*::AB:*ab*; el ángulo en C= al en *c*, y en que se sabe ademas que AB < AC, y que los ángulos en B y *b*, son de una misma especie, esto es, ó ambos agudos, ó ambos rectos, ó ambos obtusos; digo que los dos triángulos ABC, *abc* son semejantes.

Dem. Tómese en AB una parte A*b*′=*ab*, y en AC una parte A*c*′=*ac* y tírese la *b*′*c*′; con lo cual la proporcion del supuesto nos dará AC:A*c*′::AB:A*b*′; luego la *b*′*c*′ será (321) paralela á la base BC; luego el ángulo B=*b*′ y el *c*′=C=*c*. Luego (328) el triángulo A*b*′*c*′ es semejante con el ABC; pero el A*b*′*c*′ es igual (273 cor. 5.º) con el *abc*; pues tienen dos lados iguales, á saber A*b*′=*ab*, A*c*′=*ac*, el ángulo *c* opuesto al menor de los lados, *ab*, igual al *c*′ opuesto al menor en el A*b*′*c*′, y los ángulos en *b* y *b*′ son de una misma especie por suponerse que lo son los en *b* y B que es igual con *b*′; luego el *abc* será semejante con ABC, que era L. Q. D. D.

Esc. 3.º *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, y proporcionales los lados que forman otro ángulo, que sea de la misma especie en ambos triángulos.*

Espl. Sean CAB y FDE (fig. 76 *) dos triángulos, en los que se tenga el ángulo ABC=DEF, y proporcionales los lados que forman los ángulos ACB, DFE, de modo que se tenga BC:AC::EF:DF; voy á demostrar, que con tal que se sepa que los espresados ángulos ACB, DFE son ambos agudos ó ambos obtusos, los triángulos serán semejantes.

Dem. Si por los puntos E y F se tiran las rectas EG, FG que formen los ángulos FEG y EFG iguales con ABC y BCA, tendrémos que el triángulo ABC será semejante á GEF (cor. 1.º), y darán BC:CA::EF:FG; y como esta proporcion y la del supuesto tienen la primera razon comun, será

EF:FG::EF:DF; que da FG=DF Luego los triángulos EGF y EDF tienen el lado FG=FD, el lado EF comun, y los ángulos FEG=ABC=FED, y los otros ángulos EFD y EFG de la misma especie, por serlo EFD de la misma que ACB por el supuesto, y EFG=ACB por construccion; luego dichos triángulos serán (273 cor. 6.º) iguales, por consiguiente el ángulo EFG ó ACB igual DFE, y por lo mismo (cor. 1.º) los triángulos ABC y DEF son semejantes; que era L. Q. D. D.

Esc. 4.º *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, y los lados opuestos á dicho ángulo son proporcionales con las perpendiculares que se les tiren desde dichos ángulos.*

Espl. Sean ABC, *abc* (fig. 75 *) dos triángulos en que el ángulo BAC=*bac*, y que ademas se tenga AD:BC::*ad*:*bc*; voy á demostrar que dichos triángulos son semejantes.

Dem. Si los dos primeros términos de la proporcion del supuesto, los multiplicamos por AB, y los otros dos por *ab*, se nos convertirá en AD×AB:BC×AB::*ad*×*ab*:*bc*×*ab*. Esta proporcion compuesta, la podrémos descomponer (190) en las dos proporciones simples siguientes AD:AB::*ad*:*ab* y AB:BC::*ab*:*bc*.

La primera nos dice que los triángulos ABD,*abd* rectángulos en D y *d* son semejantes (esc: 1.º); lo que da el ángulo DBA=*dba*, ó CBA=*cba* y como por el supuesto el ángulo BAC=*bac*, resulta en virtud de lo demostrado (cor. 1.º) que los triángulos ABC, *abc* son semejantes que era L. Q. D. D.

Esc. 5.º Siempre que se hayan de sacar proporciones de triángulos semejantes se compararán los lados del uno con los *homólogos* del otro; esto es, los que estén opuestos á ángulos iguales, ó sean paralelos ó perpendiculares.

332 Teor. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán seis cosas:* 1.ª, *el triángulo que-*

dará dividido en otros dos semejantes al total, y semejantes entre sí: 2.ª, la perpendicular bajada será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa: 3.ª, cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente: 4.ª, el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de los catetos: 5.ª, los cuadrados de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes: y 6.ª, la perpendicular será cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.

Espl. Si desde el ángulo recto A (fig. 75) del triángulo rectángulo ABC, se baja una perpendicular AD á la hipotenusa BC, digo que se verificarán seis cosas: 1.ª, los dos triángulos ADB, ADC serán semejantes al total BAC, y semejantes entre sí; 2.ª, la perpendicular AD será media proporcional entre los dos segmentos BD y DC de la hipotenusa BC; 3.ª, cada cateto AB ó AC será medio proprocional entre la hipotenusa BC y el segmento BD, ó DC que á cada uno corresponde; 4.ª, el cuadrado BC^2 de la hipotenusa será igual á la suma BA^2+CA^2 de los cuadrados de los catetos; 5.ª, Los cuadrados BA^2, CA^2 de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes BD y DC; y 6.ª, la DA será cuarta proporcional á la hipotenusa BC y á los catetos CA, AB.

Dem. 1.ª Por tener los triángulos BAC y BAD un ángulo comun en B, y ademas el primero uno recto A por el supuesto, y el segundo el *r* tambien recto, dichos triángulos serán semejantes (331 cor. 2.º). Por tener los triángulos BAC y DAC comun el ángulo en C, y ademas cada uno uno recto, el primero en A, y el segundo en *m*, tambien serán semejantes. Ahora, de ser semejantes BAC y BAD se sigue que el ángulo en C=*n*; luego los triángulos BAD y DAC, ademas del ángulo recto *r* y *m*, tienen otro ángulo igual; luego (331 cor. 2.º) son semejantes. L. 1.º Q. D. D.

2.ª Por ser los triángulos BAD y DAC seme-

jantes, darán (§ 331 esc. 2.º) BD:AD::DA:DC, que es L. 2.º Q. D. D.

3.ª Los triángulos semejantes BAC y BAD darán (331 essc. 2.º) BC:BA::BA:BD (m).

Los BAC, DAC, dan BC:AC::AC:DC (n), que junta con la (m) manifiesta L. 3º Q. D. D.

4.ª Las proporciones (m) y (n) dan $BA^2=BC\times BD$ (p), $AC^2=BC\times CD$ (q); y sumando, resolviendo en factores y reduciendo, será $BA^2+BC^2= BC\times BD+BC\times CD=BC\times(BD+CD)=BC\times BC=BC^2$ ó $BC^2=AB^2+AC^2$, que es L. 4.º Q. D. D.

5.ª Si con las dos ecuaciones (p) y (q) formamos proporcion, y simplificamos por BC, será

$$BA^2:AC^2::BC\times BD:BC\times CD::BD:CD,$$

que es L. 5.º Q. D. D.

6.ª Los triángulos BAC, BAD, dan BC:CA::BA:AD, que es L. 6.º Q. D. D.

Cor. Una vez que $BC^2=BA^2+CA^2$, si estraemos la raiz cuadrada de ambos miembros será

$$BC=\sqrt{BA^2+CA^2};$$

luego en conociendo los dos catetos se conocerá la hipotenusa, *estrayendo la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos*. Y si en la misma ecuacion se despeja un cateto, tal como CA, se tendrâ

$CA^2=BC^2-BA^2$, que da $CA=\sqrt{BC^2-BA^2}$; la primera quiere decir, que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto*; y la segunda, que en conociendo la hipotenusa y un cateto, se conocerá el otro cateto *estrayendo la raiz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto*.

333 Teor. *Si desde un punto cualquiera A de la circunferencia* (fig. 76) *se baja una perpendicular al diámetro BC, se verificarán cuatro cosas*: 1.ª, *la perpendicular AD será media proporcional entre los dos segmentos BD, DC del diámetro*: 2.ª, *si desde los estremos del diámetro se tiran las cuerdas BA, CA á dicho punto de la circunferencia, estas serán medias*

proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente: 3.ª *los cuadrados BA^2, CA^2 de dichas cuerdas serán entre sí como los segmentos correspondientes:* y 4.ª, *el cuadrado BC^2 del diámetro es igual á la suma de los cuadrados BA^2, CA^2 de las cuerdas, que desde sus estremos se tiren á un punto cualquiera A de la circunfersncia.*

Dem. Es la misma que la del caso anterior, sólo con sustituir las voces *diámetro* á la *hipotenusa*; *cuerda* á *cateto*; *punto de la circunferencia* á *vértice de ángulo recto*; pues el triángulo BAC es rectángulo en A (§. 304 cor. 3.º).

Cor. 1.º Una vez que $BA^2 = BC \times BD$, y BA es una cuerda cualquiera, se sigue que *el cuadrado de una cuerda es siempre igual al diámetro ó duplo del radio multiplicado por el segmento correspondiente á dicha cuerda.*

Cor. 2.º Luego si se tienen dos cuerdas, tiradas cada una desde su diámetro, el cuadrado de cada una será igual al diámetro multiplicado por el segmento que le corresponda; y formando proporcion con las dos ecuaciones, se tendrá despues de simplificar la última razon, que en general *los cuadrados de las cuerdas son como los segmentos que causan en el diámetro que pasa por uno de sus estremos, las perpendiculares bajadas desde los otros estremos; y las cuerdas serán entre sí* (190) *como las raices cuadradas de los segmentos.*

334 Probl. *Entre dos líneas dadas K, L* (fig. 76) *hallar una media proporcional.*

Res. y *Dem.* Póngase una á continuacion de otra de modo que BD=K, DC=L; sobre toda la BC como diámetro, descríbase la semicircunferencia BAC; en el punto D donde se unieron, levántese la perpendicular DA hasta encontrar á la circunferencia, la cual será la media proporcional pedida (333 1.ª).

335 Teor. *En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del mayor lado es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados; y en todo triángulo*

acutángulo, el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Espl. Sea primero el triángulo obtusángulo ABC (fig. 77); digo que el cuadrado de AB es mayor que la suma de los cuadrados de AC y CB, ó que $AB^2 > AC^2+CB^2$; y si el triángulo ABC (fig. 78) es acutángulo, se tendrá $AB^2 < AC^2+CB^2$.

Dem. 1.º Bajando la perpendicular BD (fig. 77), el triángulo ADB será rectángulo, y (332, 4.ª) dará $AB^2=AD^2+BD^2$ (n);

pero $AD^2=(AC+CD)^2=AC^2+2AC\times CD+CD^2$; y por ser rectángulo el triángulo CBD será (§ 332 cor.) $BD^2=BC^2-CD^2$; luego poniendo en vez de estos cuadrados sus valores en la ecuacion (n), se convertirá en $AB^2=AC^2+2AC\times CD+CD^2+BC^2-CD^2=AC^2+BC^2+2AC\times CD$; luego el cuadrado de AB, que es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas la cantidad $2AC\times CD$, escederá á dicha suma en esta cantidad, luego será mayor. L. 1.º Q. D. D.

2.º Bajando la perpendicular BD (fig. 78) el triángulo rectángulo ABD dará $AB^2=AD^2+BD^2$ (p); pero $AD^2=(AC-CD)^2=AC^2-2AC\times CD+CD^2$; y el BDC dará $BD^2=BC^2-CD^2$; y sustituyendo estos valores en (p) resultará

$AB^2=AC^2-2AC\times CD+CD^2+BC^2-CD^2=AC^2+BC^2-2AC\times CD$; luego al cuadrado de AB, que es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos la cantidad $2AC\times CD$, le faltará dicha cantidad para ser igual con ella; luego será menor. L. 2.º Q. D. D.

Esc. 1.º Para cifrar en ecuaciones la relacion de los lados de los triángulos, y para la espedicion de los cálculos, se señalan en general los ángulos por las letras mayúsculas A, B, C, que se suponen en sus vértices, y por a, b, c los lados opuestos respectivamente á dichos ángulos, como se ve (figs. 77 y 78); con lo cual las dos ecuaciones anteriores reunidas en una, darán $c^2=b^2+a^2\pm 2b\times CD$; que quiere

decir, que *en todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado mayor* (ó de un lado), *es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas ó menos el duplo del lado sobre que se tira la perpendicular, multiplicado por el segmento interceptado por la perpendicular hasta el ángulo opuesto al lado que se considera.*

Esc. 2.° Si el segmento CD fuese nulo, se tendria $c^2 = b^2 + a^2$, y el triángulo seria rectángulo, pues la perpendicular caeria por el mismo lado BC, ó seria él mismo.

336 Teor. *Si desde dos vértices cualesquiera de un triángulo se tiran dos líneas al punto medio de su respectivo lado opuesto, dichas líneas se encontrarán á las dos terceras partes de distancia á su vértice respectivo.*

Espl. Sea ABC (fig. 79) un triángulo cualquiera; digo que si desde dos ángulos cualesquiera A, C, se tiran las AL, CO, á los puntos L, O, medios de los lados opuestos BC, AB, el punto de interseccion G distará de A los dos tercios de AL ó será $AG = \frac{2}{3}AL$, y del mismo modo $CG = \frac{2}{3}CO$.

Dem. Porque tirando la OL, será (321) paralela á AC, pues divide en partes iguales á los lados AB, BC, y se tendrá (§ 322) AB:BO::AC:OL; y como por el supuesto $BO = \frac{1}{2}AB$, resulta $OL = \frac{1}{2}AC$.

Ahora, los triángulos OGL, AGC, son semejantes por tener los ángulos en G iguales por opuestos al vértice, el ángulo OLG=GAC por alternos internos; luego (331 cor. 1.°) son semejantes, y darán AC:OL::AG:GL:CG:GO; y como $OL = \frac{1}{2}AC$, será $GL = \frac{1}{2}AG$, y $OG = \frac{1}{2}CG$, ó se tendrá AG:GL::2:1; que componiendo, comparando con el antecedente, será AG+GL=AL:AG::3:2, que da $AG = \frac{2}{3}AL$; del mismo modo se tiene $CG = \frac{2}{3}CO$, y resulta L. Q. D. D.

337 Teor. *Si dos líneas se encuentran dentro de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

Espl. Se dice de dos líneas que están divididas en partes recíprocamente proporcionales, cuando las

partes de la una, ó ella y una parte suya, forman los medios de una proporcion, y las partes de la otra, ó ella y una parte suya, forman los estremos; así, vamos á probar que las dos líneas BA, DC (fig. 80) que se encuentran dentro del círculo ADBC, se cortan de manera que AE:EC::ED:EB.

Dem. Únanse los puntos D y A por la DA, y los B y C por la BC; los triángulos DAE, BEC tienen los ángulos en E iguales (257), y los en D y en B iguales (304 cor. 2.°) por insistir sobre un mismo arco AC; luego son semejantes y darán AE:EC::DE:EB, que es L. Q. D. D.

338 Teor. *Si desde un punto fuera del círculo se tiran dos secantes que terminen en la parte cóncava de la circunferencia, las partes esternas serán recíprocamente proporcionales con las secantes enteras..*

Espl. Si desde el punto P (fig. 81) se tiran al círculo ABDC dos secantes PD, PC, digo que tendrémos PA:PB::PD:PC.

Dem. Si tiramos las CB y DA, los triángulos PBC, PAD, ademas del ángulo comun P, tienen iguales (304, cor. 2.°) los C y D; luego (331 cor. 1.°) serán semejantes, y nos darán PA:PB::PD:PC, que es L. Q. D. D.

339 Teor. *Si desde un ángulo de un triángulo se tira una perpendicular al lado opuesto, el lado sobre que cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como la diferencia de estos es á la diferencia de los segmentos.*

Espl. Si desde el ángulo B del triángulo ABC (fig. 82), se tira la perpendicular BD al lado opuesto AC, se verificará que

AC:AB+BC::AB—BC:AD—CD.

Dem. Haciendo centro en B con un radio igual al lado menor BC, trácese la circunferencia CEGF, y prolónguese la AB hasta que encuentre á dicha circunferencia; con lo cual las dos secantes tiradas desde A darán (§ 338) CA:AE::AG:AF;

$$\text{pero}\begin{cases}AE=AB+BE=AB+BC,\\ AG=AB-BG=AB-BC,\\ AF=AD-DF=AD-DC;\end{cases}$$

luego sustituyendo estos valores en la proporcion será $AC:AB+BC::AB-BC:AD-DC$, ó espresando por S, s, los segmentos AD, CD, se tendrá $b:c+a::c-a:S-s$, que es L. Q. D. D.

Esc. Esta proporcion da $S-s=\frac{(c+a)(c-a)}{b}$;

y como $S+s=AD+DC=AC=b$, se tendrá (§ 154)

$$S=\frac{b}{2}+\tfrac{1}{2}\times\frac{(c+a)(c-a)}{b},\ \text{y}\ s=\frac{b}{2}-\tfrac{1}{2}\times\frac{(c+a)(c-a)}{b}.$$

340 Teor. *Si desde dos ángulos homólogos de dos figuras semejantes ABCDE*, abcde (fig. 71), *se tiran diagonales á los demas ángulos, los triángulos homólogos, ó del mismo modo colocados, serán semejantes.*

Dem. Por ser las figuras semejantes, se tiene $AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::EA:ea::$&c.:&c., y $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, $E=e$, &c. &c.

Luego los triángulos ABC, *abc*, tienen el ángulo $B=b$, formado por dos lados proporcionales; luego, son semejantes (330) y dan $BC:bc::CA:ca::CD:cd$ (por la serie de razones iguales del supuesto), y el ángulo $ACB=acb$.

Ahora, si de los ángulos totales en C y *c*, que son iguales, quitamos los iguales ACB y *acb*, los residuos ACD, *acd*, tambien serán iguales; luego los triángulos ACD, *acd*, se hallan en el mismo caso que los anteriores; luego son semejantes; y como lo mismo se desmostraria de todos los demas, resulta L. Q. D. D.

341 Teor. *Recíprocamente, si dos figuras se componen de un mismo número de triángulos semejantes, y del mismo modo colocadas en cada figura, serán semejantes.*

Dem. De la semejanza de los triángulos ABC,

abc, se deduce que el ángulo B=*b*, y BCA=*bca*; de la de los triángulos ACD, *acd*, se deduce que ACD=*acd*; sumando estas dos ecuaciones será

BCA+ACD=*bca*+*acd*, ó BCD=*bcd*;

y como lo mismo demostraríamos de los demas ángulos, resulta que las figuras ABCDE, *abcde*, tienen iguales sus ángulos.

Ahora, los triángulos semejantes ABC, *abc*, dan

AB:*ab*::BC:*bc*::AC:*ac*;

los ACD, *acd*, dan AC:*ac*::DC:*dc*:AD::*ad*;
los ADE, *ade*, dan AD:*ad*::DE:*de*::EA:*ea*.

La segunda de estas series de razones iguales tiene comun con la primera la razon AC:*ac*, y la tercera tiene con la segunda comun la AD:*ad*; luego podrémos enlazar las tres de este modo
AB:*ab*::BC:*bc*::AC:*ac*::DC:*dc*::AD:*ad*::DE:*de*::EA:*ea*;
ó prescindiendo de las razones en que entran las diagonales, será AB:*ab*::BC:*bc*::DC:*dc*::DE:*de*::EA:*ea*.

Luego, ademas de tener los ángulos iguales, tienen proporcionales los lados, y por lo mismo son semejantes. L. Q. D. D.

Esc. Si representamos en general por L, L', L'', &c., l, l', l'', &c. los lados de dos figuras semejantes: por P, p, sus perímetros: por D, d, dos diagonales homólogas: y por R, r, los radios rectos ú oblicuos de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, que entónces son semejantes (327), se tendrá $L:l::L':l'::L'':l''::$&c.:&c.::$D:d$,
que (185, 1.ª) da

$$L+L'+L''+\&c.:l+l'+l''+\&c.::L:l::D:d,$$

ó reduciendo será $P:p::L:l::D:d$ (m),
y si son regulares será $P:p::L:l::R:r$ (n).

La (m) quiere decir, que *los perímetros de dos figuras semejantes son entre sí como sus lados ó diagonales homólogas*; y la (n) dice que *en los polígonos regulares semejantes, los perímetros son entre sí como los lados homólogos, ó como los radios rectos ú oblicuos*.

342 Si siendo AB (fig. 83) el lado de un polígono regular cualquiera inscrito en un círculo, *se*

quisiese otro de duplo número de lados, no habria mas que tirar el radio recto OE prolongado hasta B′, y unir el punto B′ con los A, B; pues cada lado AB′ subtenderia un arco que seria la mitad del primero. Y si dado un polígono *abcdef* (fig. 85) inscrito, *se quisiese uno circunscrito*, se tirarian los radios oblicuos O*a* O*b*, &c. y tirando en sus estremos las tangentes FA, AB, &c. su conjunto formaria el polígono que se queria; pues todos los triángulos *a*A*b*, *b*B*c*, &c. son iguales (261) é isósceles (303); de donde se sacará la igualdad de los lados AB, BC, &c. y la de los ángulos A, B, C, &c.

Y si teniendo un polígono MRVO (fig. 86) circunscrito á un círculo, *se quisiese otro de duplo número de lados*, se tirarian los radios oblicuos CM, CR, &c. y en los puntos Q, D, &c. donde encontrasen á la circunferencia, se tirarian las tangentes PN, BT &c. y se tendria el polígono PNBT &c. que se queria; porque tirando las AQ, AD, &c. todos los triángulos QNA, ABD serian iguales entre sí é isósceles.

343 Teor. *Si en un círculo se inscribe un polígono cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, la sajita correspondiente á cada uno irá siendo mas de dos veces menor que la del anterior; y por lo mismo podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.*

Espl. Sea ABED (fig. 84) un cuadrado inscrito en el círculo; digo que si se le inscribe un octógono, y luego un polígono de 16 lados, y así sucesivamente, la sajita B*k* del cuadrado será mas de dos veces menor que el radio BC; y la B*r* del octógono mas de dos veces menor que la B*k* del cuadrado, y así sucesivamente; de manera que al cabo de cierto tiempo podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

Dem. Si dividimos el arco BA en dos partes iguales en H, y tiramos la AH y la BH, esta será el lado del polígono de duplo número de lados; y por ser los cuadrados de las cuerdas tiradas desde

los estremos de un diámetro (333 cor. 2.°) como sus segmentos correspondientes, tendrémos $BA^2:BH^2::BC:Bk$; pero por ser obtusángulo el triángulo BHA se tiene (335, 1.°) que $AB^2>BH^2+AH^2$; pero $AH=BH$, luego $AH^2=BH^2$, y la desigualdad anterior se convertirá en $AB^2<2BH^2$; luego la proporcion anterior es tal que el antecedente de la primera razon es mas de dos veces mayor que el consecuente; luego el antecedente BC de la segunda será tambien mas de dos veces mayor que su consecuente Bk, ó $BC>2Bk$, ó lo que es lo mismo $Bk>\frac{1}{2}BC$.

Y como lo mismo se demostraria de Br respecto de Bk, &c. resulta (229 cor. 2.°) L. Q. D. D.

344 Teor. *Si á un círculo se le circunscribe un polígono regular cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, 1.° el lado de este último será mas de dos veces menor que el del anterior; y 2.° la sajita del segundo será mas de dos veces menor que la del primero; y por lo mismo dichas líneas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.*

Espl. Sea MRVO (fig. 86) un cuadrado circunscrito al círculo, y TBNP &c. un octógono; digo 1.° que el lado del octógono NB es mas de dos veces menor que el del cuadrado MR, ó que $NB<\frac{1}{2}MR$; y 2.° que la sajita Bc del octógono (siempre llamarémos sajita en un polígono regular, la diferencia entre sus radios recto y oblicuo) es mas de dos veces menor que la RD del cuadrado, ó que $Bc<\frac{1}{2}RD$; y si se continúa circunscribiendo polígonos de duplo número de lados, dichas líneas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Dem. 1.° El triángulo rectángulo BDR da $BR>BD$; y como (§ 342) $BD=AB$ será $BR>AB$; por la misma razon será $MN>NA$; sumando ordenadamente se tendrá $BR+MN>AB+NA=NB$; y añadiendo NB será $BR+MN+NB>NB+NB$, ó

reduciendo será $MR > 2NB$ ó $NB < \frac{1}{2}MR$, que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Para demostrar la segunda parte, hallarémos los valores de las sajitas, y comparándolos se deducirá lo que hemos dicho. En efecto, bajando la perpendicular Dl, esta será semilado del cuadrado inscrito, al será la sajita del mismo cuadrado, y ademas la Dl será paralela á aR; por lo que (320 cor. 1.º) el triángulo CaR dará

$$Ca:CR::la:DR = \frac{CR \times la}{Ca} = \frac{CR}{Ca} \times la \text{ (m)}.$$

Bajando la perpendicular cs, esta será semilado del octógono inscrito, Ds será su sajita, y ademas la cs será paralela á BD; por lo que el triángulo CDB dará $CD:CB::Ds:Bc = \frac{CB \times Ds}{CD} = \frac{CB}{DC} \times Ds$ (n). Comparando los valores (m), (n) de DR y Bc, se verá que el factor $\frac{CR}{Ca}$ del primero es mayor que el $\frac{CB}{CD}$ del segundo, pues teniendo igual denominador, el numerador CR del primero es mayor (273) que el CB del segundo: el factor la del primero es (343) mas de dos veces mayor que el Ds del segundo; luego el valor de Bc es por razon del factor CB menor que el de DR; y por razon del factor Ds mas de dos veces menor; luego con mas razon será mas de dos veces menor, ó se tendrá $Bc < \frac{1}{2}DR$, que es L. 2.º Q. D. D.

345 Teor. *Si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono regular de un mismo número de lados; y despues se inscriben y circunscriben otros de duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el perímetro del circunscrito y el del inscrito podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.*

Dem. Sea P el perímetro del polígono circunscrito y R su radio recto, que es el mismo del círculo: y sean p y r el perímetro y radio recto del inscrito; y como estos polígonos son semejantes (327), sus perímetros serán proporcionales (341 esc.) con sus radios rectos, y se tendrá $P:p::R:r$; que dividiendo da $P-p:P::R-r:R$; de donde sale

$$P-p=\frac{P(R-r)}{R}.$$

Y como en el valor de $P-p$ entra por factor $R-r$, que es la sajita del polígono inscrito, y esta va siendo mas de dos veces menor al paso que se inscriben polígonos de duplo número de lados, resulta en virtud de lo espuesto (229 cor. 3.°) que la diferencia $P-p$ de los perímetros podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D.

Cor. Luego con mas razon *se podrá circunscribir ó inscribir un polígono al círculo, en que la diferencia entre el perímetro de uno ú otro y la circunferencia, sea menor que cualquier cantidad dada.* Porque como la circunferencia (308) es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el del circunscrito, al acercarse estos perímetros el uno al otro, se acercarán con mas razon á la circunferencia.

346 Teor. *Las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios* R, r, *ó diámetros* D, d.

Dem. Sean P, p los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, circunscritos á dos círculos cuyas circunferencias sean C, c, los diámetros D, d, y R, r los radios, que tambien son (317 esc.) los radios rectos de dichos polígonos; y (341 esc.) se tendrá $P:p::R:r$; pero aumentando el número de lados de estos polígonos, se pueden acercar P á C, y p á c al mismo tiempo tanto como se quiera (345 cor.); y siendo C, c constantes, resulta (231) que $P:p::C:c$; y como esta proporcion y la anterior tie-

nen una razon comun, nos darán (§ 184, 2.ª) $C:c::R:r::2R:2r::D:d$, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego *si se conociese la relacion que un diámetro tenia con su circunferencia, en dando otro diámetro ó circunferencia se podria venir en conocimiento de la circunferencia ó diámetro respectivo*; pues en cualquiera de estos dos casos serian conocidos tres términos de la proporcion anterior.

347 Pero *Arquimédes* halló que dicha relacion del diámetro á la circunferencia era la de 7 á 22; *Pedro Mecio* halló la de 113 á 355; y la que nosotros hemos calculado por procedimientos geométricos en nuestro Tratado elemental (tomo I, § 505) es la de 1 á 3,1415926535897932 4; y por las series (tomo II del mismo Tratado haciendo uso de la fórmula del § 647) hemos hallado que la espresada relacion es la de

1 á 3,14159265358979323846264338327950 28;

luego haciendo uso de esta última, para hallar la circunferencia correspondiente al diámetro D, formarémos la siguiente proporcion

$1:3,14159$ &c. $::D:C=3,14159$ &c. $\times D=\pi D=2\pi R$; llamando π al factor 3,14159 &c. Donde debe observarse que cuando la letra π está en las espresiones de circunferencia, círculo, &c. espresa el valor 3,14159 &c. y cuando se trata de ángulos vale dos ángulos rectos.

348 Para rectificar un arco ó hallar su longitud estendido en línea recta, se dirá: $360°$, *que vale toda la circunferencia, es á su longitud* $3,14159D=\pi D$, *como el número de grados* G *del arco es á su longitud respectiva*

$$L;\ \text{ó}\ 360°:\pi D::G:L=\frac{\pi DG}{360°}.$$

349 Los cálculos que hay que hacer para hallar la relacion anterior, son sumamente complicados bájo cualquier aspecto, y por cualquier método que se hagan, como puede verse en los para-

jes ántes citados; por lo cual vamos á poner aquí un método gráfico muy sencillo, que podrá servir para casi todas las aplicaciones prácticas. Es el siguiente.

Sea AEBD (fig. 87) *una circunferencia; tírese en el punto A una tangente indefinida FG; tómese* (317 cor. 10.°) *el arco Am de 30°; por el punto m tírese el radio Om hasta F; tómese ahora sobre la misma tangente desde F á la derecha la magnitud FG igual á tres veces el radio; desde el punto G tírese al estremo B del diámetro la BG, y esta será igual en longitud á la semicircunferencia ADB, aproximada hasta mas de diezmilésimas.*

En efecto, tirando la mn perpendicular al radio AO, será semilado de exágono, y de consiguiente igual á la mitad del radio Om; por lo que el triángulo AFO dará $On:OA::mn:FA=\frac{mn\times AO}{On}$;

pero suponiendo el radio $AO=1$, será $mn=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}$, y $On=\sqrt{\overline{Om}^2-\overline{mn}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$;

luego sustituyendo se tendrá $FA=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, multiplicando arriba y abajo por $\sqrt{3}$; de donde resulta que el cateto AG del triángulo rectángulo BAG será $AG=3-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; de consiguiente la hipotenusa BG será $BG=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AG}^2}=\sqrt{2^2+(3-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2}=$

$$\sqrt{4+9-2\times 3\times\tfrac{1}{3}\sqrt{3}+\tfrac{1}{9}\times 3}=\sqrt{13-2\sqrt{3}+\tfrac{1}{3}}=$$

$$\sqrt{\tfrac{40}{3}-2\sqrt{3}}=\sqrt{\tfrac{40}{3}-2\times 1{,}7320508}=$$

$$\sqrt{13{,}3333333-3{,}4641016}=\sqrt{9{,}8692317}=3{,}14153.$$

Pero la semicircunferencia, siendo el radio la unidad, está espresada por 3,14159 &c.; luego la

línea BG es igual á la semicircunferencia BDA con ménos de una diezmilésima de diferencia. L. Q. D. D.

SEGUNDA PARTE.

De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.

350 Hasta aquí solo hemos considerado en las figuras su perímetro; ahora pasamos á manifestar las propiedades del espacio que encierran, ó de las superficies.

Teor. *Los paralelógramos que tienen bases y alturas iguales, ó que tienen una misma base y altura, ó que tienen una misma base y están entre unas mismas paralelas, son equivalentes.*

Espl. Sean ABCD, ABEF (fig. 88) dos paralelógramos que tienen la misma base AB, y están comprendidos entre las paralelas AB, DE (por consiguiente (286 esc. 1.°) tienen igual altura); digo que son iguales en superficie, ó que ABCD=ABEF.

Dem. En efecto, dichos paralelogramos nos dan

$$AD=BC, AF=BE;$$

ademas, de ser AB=EF y AB=CD, se saca CD=EF; y añadiendo CF, será CD+CF=EF+CF ó DF=CE; luego los triángulos DAF, CBE son iguales (259). Ahora, si quitamos estos triángulos del cuadriláterо ABED, se tendrá ABED−DAF=ABED−CBE; ó ABEF=ABCD, que es L. Q. D. D.

Cor. Luego *todo paralelógramo ABEF* (fig. 89), *equivale al rectángulo ABCD que tiene la misma base y altura.*

351 Teor. *Todo triángulo es la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.*

Dem. Sea ABC (fig. 90) el triángulo dado; si por A se tira la AD paralela á BC, y por C la CD paralela á BA, se tendrá un paralelógramo BADC; del cual será diagonal el lado AC; luego (313) el triángulo ABC=ACD, y la superficie de cada uno equi-

valdrá á la mitad de ABCD, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º Luego *un triángulo ABC es la mitad del rectángulo BCEF que tiene la misma base BC y la misma altura AO*; porque el rectángulo BCEF es igual en superficie al paralelogramo ABCD.

Cor. 2.º *Todos los triángulos que tienen bases y alturas iguales son equivalentes*; por ser mitades de paralelogramos iguales en superficie.

352 Teor. *Las superficies de dos rectángulos de una misma altura, son entre sí como sus bases.*

Espl. Sean ABCD, *abcd* (fig. 91) ó *R*, *r*, dos rectángulos de iguales alturas AD=*ad*; digo que serán entre sí como sus bases AB, *ab*, ó que *R*:*r*::AB:*ab*.

Aquí puede ocurrir que las bases sean comensurables, ó que no lo sean.

Dem. 1.º Si las bases tienen la comun medida AO=*ao*, y representamos por *m*, *n*, las veces que está contenida en cada una, se tendrá AB=*m*×AO, *ab*=*n*×*ao*=*n*×AO; y formando proporcion y simplificando por AO, será AB:*ab*::*m*×AO:*n*×AO::*m*:*n*.

Ahora, si por los puntos de division O, &c., *o*, *&c.*, se conciben perpendiculares OP, &c., *op*, *&c.*, los rectángulos *R*, *r*, quedarán divididos el primero en *m* rectángulos como AOPD iguales entre sí por lo demostrado (350); y el segundo en *n* rectángulos como *aopd* iguales entre sí y con AOPD por la misma razon; luego se tendrá *R*=*m*×AOPD, *r*=*n*×AOPD; y formando proporcion y simplificando por AOPD, será *R*:*r*::*m*×AOPD:*n*×AOPD::*m*:*n*; esta proporcion y la anterior (184, 2.ª) dan *R*:*r*::AB:*ab*, que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si las bases son incomensurables, digo que no puede ser *R*:*r*> ni <AB:*ab*, y de consiguiente será *R*:*r*::AB:*ab*.

Sea *R*:*r* > AB:*ab*; en este caso menguando el consecuente *ab* crecerá la segunda razon; y suponiendo que se convierte en *ax*, para que la segunda razon resulte igual á la primera, se tendrá *R*:*r*::AB:*ax*.

Hecho esto, concíbase dividida la AB en dos partes iguales, y luego en otras dos &c., hasta que resulte una parte menor que bx, en cuyo caso colocada desde a hácia b, un punto de division caerá entre x y b, v. g. en t; y tirando la perpendicular ut, los rectángulos R y $atud$ que tienen comensurables sus bases AB, at, serán como estas y darán $R:atud::\mathrm{AB}:at$; y como esta proporcion y la anterior tienen los mismos antecedentes, los consecuentes darán

$$r = abcd:atud::ax:at;$$

proporcion absurda, por ser la primera razon de mayor desigualdad y la segunda de menor; luego no se puede suponer $R:r > \mathrm{AB}:ab$.

Por un razonamiento análogo se demuestra que no puede ser menor; luego será igual. L. 2.º Q. D. D.

353 Teor. *Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Espl. Sean ABCD, AEGF ó R, r (fig. 92) estos dos rectángulos; digo que $R:r::\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}:\mathrm{AE}\times\mathrm{AF}$.

Dem. Habiendo dispuesto los rectángulos de manera que los ángulos en A estén opuestos al vértice, prolónguense los lados GE, CD hasta que se encuentren en H, y tendrémos que los dos rectángulos R, R', que tienen la misma altura AD, serán como sus bases AB, AE, y darán $R:R'::\mathrm{AB}:\mathrm{AE}$; del mismo modo los rectángulos R', r, que tienen la misma altura AE, darán $R':r::\mathrm{AD}:\mathrm{AF}$.

Multiplicando estas dos proporciones y omitiendo (191) el término R', se tendrá $R:r::\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}:\mathrm{AE}\times\mathrm{AF}$, que es L. Q. D. D.

Esc. Luego se puede tomar por medida de un rectángulo *el producto de su base por su altura*, con tal que se entienda por este producto el de dos números que espresen las unidades lineales contenidas en la base, y las contenidas en su altura.

Así, elijiendo por unidad de medida el cuadrado a (fig. 93) cuyo lado sea la unidad de longitud, esto es, 1 pie, 1 vara, &c, y suponiendo que esté contenida dicha unidad de longitud 5 veces en la base

del rectángulo A, y 3 en la altura, se tendrá

$A:a::5\times3:1\times1::15:1$; que da $A=15a=15$;

el rectángulo A equivaldrá á $5\times3a=15a=15$, porque el cuadrado de 1 es igual 1; esto es, el rectángulo A vale 15 veces el cuadrado a, como manifiesta la figura.

354 Teor. *La superficie de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Dem. Porque el paralelogramo ABEF (fig. 89) es equivalente al rectángulo ABCD, que tiene la misma base AB, y la misma altura AD; pero este tiene por medida AB×AD; luego AB×AD es igual á la superficie del paralelogramo ABEF, que es L. Q. D. D.

Cor. De donde resulta que *la superficie de un triángulo es igual al producto de su base por la mitad de su altura, ó á la altura por la mitad de la base.* Porque el triángulo ABC (fig. 90) es la mitad del paralelogramo ABCD; y como la superficie de este es BC×AO, la del triángulo será la mitad ó

$$BC\times\tfrac{1}{2}AO=\tfrac{1}{2}BC\times AO.$$

Esc. Si llamamos P á un paralelogramo cualquiera (fig. 94), A á su altura, y B á su base, se tendrá $P=B\times A$; llamando p á otro paralelogramo, cuya base sea b, y a su altura, se tendrá $p=b\times a$; y formando proporcion, será $P:p::B\times A:b\times a$; que espresa que *las superficies de dos paralelogramos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas, ó están en razon compuesta de sus bases y alturas.*

Si $A=a$, será $P:p::B\times A:b\times A::B:b$; que quiere decir, que *los paralelogramos que tienen una misma altura, son como sus bases.*

Si se supone $B=b$, será $P:p::B\times A:B\times a::A:a$; que quiere decir, que *los paralelogramos de iguales bases son como sus alturas.*

Si $P=p$, serán tambien iguales sus espresiones, ó será $B\times A=b\times a$, de donde (§ 180) $B:b::a:A$; es decir, que *cuando los paralelogramos son iguales, las bases están en razon inversa de las alturas.*

Si multiplicamos estremos y medios en la proporcion primitiva, será $P\times b\times a = p\times B\times A$; de donde $B:b::P\times a:p\times A$, que quiere decir, que *á desigualdad de todo, las bases están en razon compuesta, directa de los paralelogramos, é inversa de las alturas*; y sacando de la misma ecuacion la razon de las alturas, se tendrá

$A:a::P\times b:B\times p$;

que quiere decir, que *á desigualdad de todo, las alturas están en razon compuesta, directa de los paralelogramos, é inversa de las bases.*

355 Si en la proporcion primitiva se supone $A:a::B:b$, en la razon compuesta $A\times B:a\times b$, se podrá sustituir en vez de $A:a$ su igual $B:b$ ó al contrario, y se tendrá

$P:p::A\times A:a\times a::B\times B:b\times b::A^2:a^2::B^2:b^2$;

que quiere decir, que *cuando las alturas son proporcionales con las bases, las superficies son como los cuadrados de ellas*; pero el ser las bases proporcionales con las alturas es propiedad de los paralelogramos semejantes; luego *dos paralelogramos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus bases, de sus alturas, y en general de sus líneas homólogas*, como se demuestra tambien geométricamente.

En efecto, sean P, p (fig. 94) dos paralelogramos, que por lo dicho ántes darán $P:p::\mathrm{BC}\times\mathrm{AE}:bc\times ae$; y por ser semejantes, será $\mathrm{AB}:ab::\mathrm{BC}:bc$ y el ángulo $\mathrm{B}=b$; y como los en E y e son rectos, los triángulos ABE, abe, son semejantes (331 cor. 2.°), y darán $\mathrm{AB}:ab::\mathrm{AE}:ae$.
Luego sustituyendo en la razon compuesta de arriba, en vez de la $\mathrm{AE}:ae$, su igual $\mathrm{BC}:bc$ ó $\mathrm{AB}:ab$, se tendrá $P:p::\mathrm{BC}\times\mathrm{BC}:bc\times bc::\mathrm{BC}^2:bc^2::\mathrm{AB}^2:ab^2::\mathrm{AE}^2:ae^2$.

Esc. Y como las mitades son entre sí como los todos, se deduce que *los triángulos son como los productos de sus bases por sus alturas; que á igualdad de bases, son como sus alturas &c.* Sobre cuyas propiedades y modo de deducirlas, aconsejamos á los principiantes que se ejerciten todo lo que juzguen ne-

cesario, hasta que se lleguen á apropiar ó familiarizar con este procedimiento; pues son innumerables las continuas aplicaciones que tiene.

356 Teor. *La superficie de un trapecio ABCD* (fig. 95) *es igual á su altura EF multiplicada por la semisuma de las bases paralelas AB, CD.*

Dem. Si por el punto G, medio de CB, se tira KL paralela al lado opuesto AD, y se prolonga DC hasta que encuentre á esta en K, los triángulos GBL, GCK serán iguales (261); pues los ángulos en G son iguales, los B, C, tambien, y CG=GB por construccion; luego añadiendo á ambos ALGCD, resultará el trapecio ABCD equivalente al paralelogramo ADKL, y tendrá por medida la de este que es EF×AL.

$$\text{Pero } AL=DK=\frac{2AL}{2}=\frac{AL+DK}{2}=$$

$$\frac{AB-BL+DC+CK}{2}=\frac{AB+CD}{2}$$

(porque $-BL$ y $+CK$ se destruyen por la igualdad de los triángulos); luego sustituyendo este valor de AL en la espresion EF×AL, resultará la superficie del

$$\text{trapecio } ABCD=EF\times\frac{AB+CD}{2},$$

que era L. Q. D. D.

Esc. Si por el punto G medio de BC, se tira GH paralela á la base AB, el punto H será tambien el medio de AD; porque AHGL es un paralelogramo, por ser paralelos los lados opuestos; luego

$$GH=AL=\frac{AB+CD}{2};$$

y sustituyendo este nuevo valor será ABCD=EF×HG, esto es, *la superficie de un trapecio es igual á su altura multiplicada por una paralela equidistante de las bases paralelas.*

357 Teor. *La superficie de un polígono regular es*

igual al perímetro multiplicado por la mitad de su radio recto.

Espl. Sea GHPK &c. (fig. 96) un polígono regular de n lados, que representarémos por P', sea P el perímetro GHP &c. y R su radio recto OT; digo que se tendrá $P'=P\times\frac{1}{2}R$.

Dem. Por ser regular el polígono, todos los n triángulos GOH, GOM, &c. son (317 cor. 2.°) iguales; luego será GHPK &c. $=n\times$GOH$=n\times$HG$\times\frac{1}{2}$OT; pero $n\times$HG compone el perímetro P del polígono; luego sustituyendo será $P'=P\times\frac{1}{2}R$, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego si llamamos p' otro polígono regular, p al perímetro, y r á su radio recto, se tendrá $p=p\times\frac{1}{2}r$; y formando proporcion será

$$P':p'::\frac{P\times R}{2}:\frac{p\times r}{2}::P\times R:p\times r.$$

Cor. 2.° Si los polígonos fuesen de un mismo número de lados serian semejantes (327), y se tendria (§ 341 esc.) $P:p::R:r::L:l$, representando por L, l, dos líneas homólogas; luego sustituyendo en la razon compuesta anterior $P\times R:p\times r$ en vez de una de las componentes su igual sacada de aquí, se tendrá

$$P':p'::P\times P:p\times p::R\times R:r\times r::P^2:p^2::R^2:r^2::L^2:l^2;$$

que quiere decir, que *las superficies de los polígonos regulares semejantes ó de un mismo número de lados, guardan la misma razon que los cuadrados de los perímetros, de los radios rectos, y en general son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Esc. 1.° Aunque los polígonos no sean regulares, se verifica esta proposicion, con tal que sean semejantes; porque en este caso los podrémos dividir (340) en cierto número de triángulos $A, B, C,$ &c. $a, b, c,$ &c. semejantes, y será

$$P'=A+B+C+\text{\&c. y } p'=a+b+c+\text{\&c.}$$

y como los triángulos tendrán la razon de los cuadrados de los lados homólogos, se sigue que si espresamos por L, l á estos lados, nos resultará

$$A:a::B:b::C:c::\&c.::\&c.::L^2:l^2,$$
de donde (185, 1.ª) sale
$$A+B+C+\&c.:a+b+c+\&c.::L^2:l^2;$$
ó lo que es lo mismo $P':p'::L^2:l^2$.

Esc. 2.° Cuando el polígono no es regular se divide en triángulos por medio de diagonales, &c.; se halla la superficie de cada uno, y se tendrá la de la figura.

358 Teor. *Si en un círculo se circunscriben é inscriben polígonos regulares de un mismo número de lados, despues de un duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el circunscrito y el inscrito se podrá hacer menor que cualquier cantidad dada.*

Dem. Si espresamos por P' la superficie del polígono circunscrito, por p' la del inscrito, y por R, r sus radios rectos, se tendrá (357 cor. 2.°) $P':p'::R^2:r^2$; que dividiendo da $P'-p':P'::R^2-r^2:R^2$;
de donde sale $P'-p'=\frac{P'(R^2-r^2)}{R^2}$.

Pero el radio recto del polígono circunscrito, que es el mismo que el del círculo, se compone del radio recto del polígono inscrito y de la sajita, á que llamarémos s; luego $R^2=(r+s)^2=r^2+2rs+s^2$; cuyo valor sustituido en el numerador de la espresion anterior, y reduciendo, la convertirá en
$$P'-p'=\frac{P'(2rs+s^2)}{R^2}=\frac{P'(2r+s)}{R^2}\times s;$$
y como en esta espresion entra por factor la sajita s, que (344) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, resulta (229 cor. 3.°) que tambien podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, la diferencia entre las superficies de dichos polígonos L. Q. D. D.

Cor. Luego con *mas razon se podrá hacer que la diferencia entre la superficie de uno de estos polígonos y la del círculo, sea menor que cualquier cantidad da-*

da. Porque el círculo es menor que el polígono circunscrito del que es parte, y mayor que el inscrito, respecto del cual es todo.

359 Teor. *La superficie de un círculo es igual al producto de la circunferencia por la mitad del radio.*

Espl. Sea O un círculo cualquiera, C su circunferencia, y R el radio; digo que $O=C\times\frac{1}{2}R$.

Dem. Si espresamos por P' la superficie de un polígono regular circunscrito al círculo, por P su perímetro, y por R su radio recto, que es el mismo del círculo, tendrémos (§ 357) $P'=P\times\frac{1}{2}R$; pero P' se puede acercar (358 cor.) á O tanto como se quiera, y $P\times\frac{1}{2}R$ se puede acercar al mismo tiempo á $C\times\frac{1}{2}R$ tanto como se desee, por poderlo hacer (§ 345 cor.) P á C y ser $\frac{1}{2}R$ comun; luego tenemos aquí dos cantidades variables P' y $P\times\frac{1}{2}R$, que al paso que menguan se pueden acercar á las dos constantes O y $C\times\frac{1}{2}R$ todo lo que se quiera, conservando siempre la razon de igualdad; luego las constantes tendrán (231 cor.), esta misma razon y será $O=C\times\frac{1}{2}R$, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º Dividiendo por 2, por 4, por n, la ecuacion anterior, se tendrá

$$\frac{O}{2}=\frac{C}{2}\times\frac{1}{2}R,\ \frac{O}{4}=\frac{C}{4}\times\frac{1}{2}R,\ \frac{O}{n}=\frac{C}{n}\times\frac{1}{2}R;$$

que quiere decir, que *el semicírculo, el cuadrante, y en general el sector del círculo, es igual á su arco correspondiente multiplicado por la mitad del radio.*

Cor. 2.º Si en vez de C sustituimos su valor (347) se tendrá $O=3,14159\times D\times\frac{1}{2}R=3,14159\times 2R\times\frac{1}{2}R=3,14159\times R^2=\pi R^2$, cuya fórmula importa retener, por ser el fundamento para la resolucion de todas las cuestiones relativas al círculo.

Esc. Si representamos por o otro círculo, por c, r, su circunferencia y radio, por d su diámetro, y en general por l una línea homóloga á L del otro, como cuerdas de arcos de un mismo número de grados &c. se tendrá $o=c\times\frac{1}{2}r$; y formando proporcion

será $O:o::C\times\frac{1}{2}R:c\times\frac{1}{2}r::C\times R:c\times r$;
y sustituyendo (189) en la razon compuesta $C\times R:c\times r$, en vez de la razon $C:c$, su igual $R:r$, ó $D:d$, ó $L:l$, &c, ó al contrario, se tendrá $O:o::C\times C:c\times c::R\times R:r\times r::D\times D:d\times d::C^2:c^2::R^2:r^2::D^2:d^2::L^2:l^2$;
que manifiesta *que las superficies de los círculos están en razon duplicada de sus circunferencias, radios, diámetros, y en general de las líneas homólogas.*

De la reduccion de las superficies.

360 Cuando dada una superficie se encuentra otra que le sea igual, se dice que se *reduce* la primera á la segunda.

Ahora, como vamos á manifestar que toda superficie se puede reducir á cuadrado, se suele decir que *medir una superficie y cuadrar una superficie es una misma cosa.* En efecto, cuando se mide una superficie, no se hace otra cosa que encontrar la relacion que tiene aquella con el cuadrado que sirve de unidad de medida; y luego buscando un cuadrado que tuviese con el propuesto esta relacion, tendríamos un cuadrado cuya superficie seria igual con la propuesta.

361 Así, si nos propusiéramos *hallar un cuadrado equivalente á un paralelogramo dado ABCD* (fig. 97); buscaríamos una media proporcional (334) entre la base BC y la altura AE, que llamándola X será el lado del cuadrado que se pide. Porque la construccion da $\div BC:X:AE$, de donde $X^2=BC\times AE$; y como X^2 es el cuadrado formado sobre X, y $BC\times AE$ es la superficie del paralelogramo (354), resulta que son iguales en superficie.

Cor. Luego *para cuadrar un triángulo se hallará una media proporcional entre la base y la mitad de la altura.*

362 Como un polígono regular es igual al perímetro por la mitad del radio recto, *para cuadrarle se hallará una media proporcional entre el perímetro y la mitad del radio recto.*

363 Del mismo modo, *para reducir un círculo á cuadrado, ó buscar un cuadrado equivalente á un círculo, se hallará una media proporcional entre la circunferencia y la mitad del radio.*

De los planos, de su posicion, y de los ángulos sólidos.

364 Hasta aquí solo hemos considerado las líneas tiradas sobre un mismo plano; ahora vamos á manifestar las posiciones que pueden tener respecto de los planos donde no se hallan, y la posicion de los diferentes planos entre sí.

Se dice que una recta es *perpendicular* á un plano, ó que un plano es *perpendicular* á una recta, cuando dicha recta es perpendicular á todas las líneas que en dicho plano pasan por el punto en que esta perpendicular encuentra al plano, cuyo punto se llama el *pie* de la perpendicular. Este pie de la perpendicular se llama tambien la *proyeccion* del punto del espacio sobre dicho plano.

Una recta es *paralela* á un plano, ó un plano es *paralelo* á una recta, cuando no se pueden encontrar aunque se prolonguen todo lo que desee; y dos planos son *paralelos*, cuando no se pueden encontrar á cualquier distancia que se prolonguen.

365 Esto entendido, lo primero que se debe saber es, que, así como por un punto pueden pasar infinitas líneas (244), del mismo modo *por una recta pueden pasar infinitos planos.* En efecto, si concebimos que el libro (fig. 1) se abre, la tapa ABDC jirará al rededor de la recta CD, y tantas posiciones como se dén á dicha tapa, manifestarán la situacion de otros tantos planos que pasen por la recta CD; y como estas posiciones pueden ser infinitas, se sigue que son infinitos los planos que pueden pasar por una recta. Ahora, si ademas de la recta CD, ó de los puntos C, D, se señalase otro punto A, *ya no habria mas que un plano que pasase por dichos tres puntos, ó por una recta y un punto dado fuera de ella.*

De dónde se deduce 1.° que *por dos puntos pueden pasar infinitos planos.*

2.° Que *tres puntos no situados en línea recta, ó un triángulo ABC* (fig. 98), *determinan la posicion de un plano.*

3.° *Dos rectas AB, AC que se cortan, están en un mismo plano*; porque concibiendo un plano que pase por la AB, y que va jirando hasta que pase por C, quedará determinada la posicion del plano, que pasa por los tres puntos A, B, C, ó por las dos rectas dadas.

4.° *Dos paralelas AB, CD* (fig. 99) *determinan la posicion de un plano*; porque si se tiran las secantes EF, HG que se corten, el plano que pase por estas, será el plano en que se hallen dichas paralelas, pues cada una tiene dos puntos H, E y F, G en el plano que pasa por las dos secantes.

366 Teor. *La interseccion comun de dos planos que se cortan es una línea recta.*

Dem. Porque si en los puntos comunes á los dos planos se encontrasen tres que no estuviesen en línea recta, los dos planos de que se trata, que pasan cada uno por estos tres puntos, no formarian sino un solo y mismo plano, lo que es contra el supuesto.

367 Teor. *Si una recta AP* (fig. 100) *es perpendicular á otras dos PB, PC, que se cruzan en su pie en el plano MN, será perpendicular al plano MN.*

Dem. Porque como las dos rectas PB, PC determinan la posicion del plano MN, lo que suceda á las rectas debe suceder al plano; pero la recta AP es perpendicular á las dos PB, PC, luego es perpendicular al plano. L. Q. D. D.

Cor. 1.° *La perpendicular AP es mas corta que una oblicua cualquiera AQ*; porque es cateto, y la oblicua hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Cor. 2.° *Por un punto P dado sobre un plano, no se puede levantar sino una perpendicular á este plano.*

Cor. 3.° *Tambien es imposible bajar desde un punto fuera de un plano dos perpendiculares á este plano.*

Cor. 4.º Luego *la verdadera distancia de un punto á un plano, se debe medir por la perpendicular tirada al plano desde dicho punto*; por ser la única que se puede tirar de su especie.

368 Teor. *Las oblicuas AB, AC, AD* (fig. 101) *que distan igualmente de la perpendicular son iguales; y de dos oblicuas AE, AD, que distan desigualmente de la perpendicular, la que mas se aleja es la mas larga.*

Dem. Porque siendo rectos los ángulos APB, APC, APD, si se suponen las distancias PB, PC, PD iguales entre sí, los triángulos APB, APC, APD tendrán dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego serán iguales; luego las hipotenusas ó las oblicuas AB, AC, AD serán iguales entre sí. Ahora, si la distancia PE es mayor que PD ó su igual PB, tendrémos que siendo recto el ángulo APB, el ABE será obtuso (266); luego será mayor que el AEB, y por lo mismo AE $>$ AB$=$AD, que es L. Q. D. D.

369 Teor. *Sea AP* (fig. 102) *una perpendicular al plano MN, y BC una línea situada en este plano; si desde el pie de la perpendicular se tira la PD perpendicular á BC, y se tira la DA, digo que DA será perpendicular á BC, en el plano que pasa por las dos líneas AD, CB.*

Dem. Porque si se toma DB$=$DC, y se tiran las PB, PC, AB, AC, será (273) la oblicua PB$=$PC; luego las AB, AC tambien lo serán (368); luego la AD tiene dos de sus puntos A y D equidistantes de los estremos B y C de la BC; luego (274) le es perpendicular L. Q. D. D.

Esc. Se ve al mismo tiempo, que la BC es perpendicular al plano APD, pues es perpendicular á las dos rectas AD, PD, que se hallan en él.

370 Teor. *Si una línea AP* (fig. 103) *es perpendicular á un plano MN, toda línea DE paralela á AP será perpendicular al mismo plano.*

Dem. Porque concibiendo un plano que pase por

las paralelas AP, DE, su interseccion con el MN será PD; y tirando en el plano MN la BC perpendicular á PD, y uniendo el punto A con el D, tendrémos que BC será perpendicular (369 esc.) al plano APDE; luego el ángulo BDE será recto; pero el EDP es tambien recto, pues AP es perpendicular á PD, y DE paralela á AP; luego la línea DE es perpendicular á las dos rectas DP, DB; luego es perpendicular á su plano MN, que es L. Q. D. D.

Cor. Recíprocamente, *si las rectas AP, DE, son perpendiculares al mismo plano MN, serán paralelas.*

371 Teor. *Si una línea AB* (fig. 104) *es paralela á una recta CD, tirada en el plano MN, será paralela á este plano.*

Dem. Porque concibiendo un plano por las dos paralelas AB, CD, si la recta AB encontrase al plano MN deberia hacerlo en un punto de la CD, lo que es imposible; luego la AB no puede encontrar al plano MN, y le será paralela. L. Q. D. D.

372 Teor. *Dos planos MN, PQ* (fig. 105) *perpendiculares á una misma recta AB, son paralelos entre sí.*

Dem. Porque si se encontrasen, tirando de un punto cualquiera O de la interseccion dos rectas AO, OB una en cada plano, la recta AB seria perpendicular á las dos líneas, OA, OB (§ 364), y en el triángulo AOB habria dos ángulos rectos, lo que (266 cor. 1.º) es imposible; luego los planos son paralelos. L. Q. D. D.

373 Teor. *Las intersecciones EF, GH* (fig. 106) *de dos planos paralelos MN, PQ, con un tercer plano FG, son líneas paralelas.*

Dem. Porque si las líneas EF, GH, situadas en un mismo plano, que aquí es el EFGH, no son paralelas, prolongadas se encontrarán; luego los planos MN, PQ, en que se hallan, tambien se encontrarán, y por lo mismo no serian paralelos, que es contra el supuesto. Luego &c.

374 Teor. *La línea AB* (fig. 105) *perpendicular*

al plano MN, es perpendicular al plano PQ paralelo al MN.

Dem. Porque si tiramos á arbitrio la línea BC en el plano PQ, y por ella y por la AB concebimos un plano, este cortará al MN en una línea AD, que será paralela (373) á la BC; por ser AB perpendicular al plano MN lo es tambien (364) á la línea AD; luego tambien lo será (280) á su paralela BC; luego es perpendicular al plano PQ, que es L. Q. D. D.

375 Teor. *Las partes EG, FH* (fig. 106) *de paralelas comprendidas por dos planos paralelos MN, PQ, son iguales.*

Dem. Porque concibiendo un plano EGHF que pase por las paralelas EG, FH, encontrará á los planos paralelos en las líneas EF y GH; estas intersecciones son tambien paralelas (373), así como por el supuesto lo son las EG, FH; luego la figura EGHF es un paralelogramo, y por lo mismo (§ 313) EG=EH, que era L. Q. D. D.

Cor. Luego *dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes los unos de los otros*; porque si EG y FH son perpendiculares á los dos planos MN, PQ, serán paralelas é iguales entre sí.

376 Teor. *Si dos ángulos CAE, DBF* (fig. 107) *no situados en el mismo plano, tienen sus lados paralelos y dirijidos en un mismo sentido, serán iguales; y los planos donde se hallan serán paralelos.*

Dem. Tómese AB=BD, AE=BF, y tírense las CE, DF, AB, CD, EF. Pues que AC es igual y paralela á BD, la figura ABDC es un paralelogramo (311); luego CD es igual y paralela con AB. Por una razon semejante EF será igual y paralela con AB; luego tambien CD es igual y paralela á EF; luego la figura CEFD es un paralelogramo, y el lado CE igual y paralelo á DF; luego los triángulos CAE, DBF, tienen sus tres lados iguales entre sí; luego son iguales (259) y darán CAE=DBF, que es L. 1.° Q. D. D.

En segundo lugar digo que el plano ACE es pa-

ralelo al plano BDF; porque si el plano paralelo á BDF tirado por el punto A, encontrase á las líneas CD, EF en otros puntos que en C y E, v. g. en G y H, entónces las tres líneas AB, GD, FH serian iguales (375); pero las tres AB, EF, DC lo eran ya; luego se tendrá CD=GD y FH=EF, lo que es absurdo, pues las unas son partes, y las otras todos; luego el plano ACE es paralelo al BDF, que era L. 2.° Q. D. D.

Cor. *Si dos planos paralelos MN, PQ, son cortados por otros dos planos CABD, EABF, los ángulos CAE, DBF, formados por las intersecciones de los planos paralelos, serán iguales*; porque la interseccion AC es paralela á BD, y AE lo es á BF; luego el ángulo CAE=DBF.

377 Teor. *El ángulo formado por dos planos MAN, MAP* (fig. 108), *se puede medir, y se mide en efecto, por el ángulo NAP que forman entre sí dos perpendiculares AN, AP, tiradas en cada uno de ellos á un mismo punto A de la interseccion comun AM*.

Dem. Porque si se supone que el un plano está sobre el otro, como dos hojas de un libro, y se tiran las perpendiculares AN, AP, estas tambien estarán confundidas. Ahora, concibiendo que el plano PAB se empieza á separar del NAC, la perpendicular AP estará tan inclinada respecto de AN, como el plano APB que contiene á la primera, lo está respecto del ANC en que se halla la segunda. Luego el ángulo rectilíneo NAP mide la inclinacion de los planos PAB, NAC, que es L. Q. D. D.

Esc. 1.° Esta inclinacion PAMC se suele llamar *ángulo diedro*; y cuando el ángulo que la mide es recto, se dice que *el un plano es perpendicular al otro.*

Esc. 2.° Cuando dos planos se atraviesan mutuamente, los ángulos opuestos al vértice son iguales, y los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos; luego *si un plano es perpendicular á otro, este es perpendicular al primero.*

Igualmente, en el concurso de los planos paralelos con un tercer plano, se verifican las mismas igualdades de ángulos, y los mismas propiedades que en el concurso de dos líneas paralelas con otra tercera.

378 Teor. *Si una línea AP* (fig. 100), *es perpendicular á un plano MN, todo plano APB que pase por la AP, será perpendicular al MN.*

Dem. Porque si concebimos la PC perpendicular á la interseccion PB, la AP que tambien lo es (364), nos dará el ángulo APC recto; y como este mide (377) la inclinacion de los planos APC, MN, resulta que el plano APB es perpendicular al MN, que es L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *la comun interseccion de dos planos APB, APQ, perpendiculares á un tercero MN, es perpendicular al mismo plano MN.* Porque podemos considerar que el plano APQ es uno de los muchos que pueden pasar por la recta AP, y que todos son perpendiculares al MN; luego la interseccion de ellos, que es la AP tambien es perpendicular al plano MN.

379 Se llama *ángulo sólido* al espacio angular comprendido entre muchos planos que se reunen en un mismo punto; así, el ángulo sólido S (fig. 109), está formado por la reunion de los ángulos planos ASB, BSC, CSD, DSA.

380 Teor. *Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos iguales cada uno al suyo, los planos en que se hallan los ángulos iguales estarán igualmente inclinados.*

Espl. Sea el ángulo ASC=DGF (fig. 110), el ASB=DGE, y el BSC=EGF; digo que los dos planos ASC, ASB, tendrán entre sí una inclinacion igual á la de los planos DGF, DGE.

Constr. Habiendo tomado SB á arbitrio tírese BO perpendicular al plano ASC; desde el punto O donde esta perpendicular encuentra al plano, tírense las OA, OC perpendiculares á SA, SC, y tírense las

AB, BC. Tómese despues GE=SB; tírese la EP perpendicular al plano DGF; desde el punto P tírense las PD, PF perpendiculares á GD, GF; y por último tírense las DE, EF.

Dem. El triángulo SAB es (369) rectángulo en A, y el GDE en D; y pues que el ángulo ASB=DGE, se tiene tambien SBA=GED. Por otra parte SB=GE, luego el triángulo SAB es igual al GDE; luego SA=GD; y AB=DE; del mismo modo se demostrará que SC=GF y BC=EF.

Esto supuesto, el cuadrilátero SAOC es igual al GDPF; porque poniendo el ángulo ASC sobre su igual DGF, á causa de SA=GD y SC=GF, el punto A caerá en D, y el C en F. Al mismo tiempo la AO perpendicular á SA caerá sobre la DP perpendicular á GD, é igualmente OC sobre PF; luego el punto O caerá sobre P, y se tendrá AO=DP. Pero los triángulos AOB; DPE, son rectángulos en O y en P, la hipotenusa AB=DE, y el lado AO=DP; luego estos triángulos son iguales (273 cor. 2.°), y por lo mismo el ángulo OAB=PDE. Pero el ángulo OAB es la inclinacion de los dos planos SAC, SAB, y el PDE es la inclinacion de los dos planos DGF, DGE; luego estas dos inclinaciones son iguales. L. Q. D. D.

Cor. De donde resulta que *dos ángulos sólidos formados como los anteriores se pueden superponer de modo que se confundan.*

PARTE TERCERA.

De los prismas, y medicion de sus superficies y volúmenes.

381 Pasamos ya á considerar la estension con sus tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad ó grueso. Cuando la estension se halla terminada por planos, se llama en general *sólido*, ó mas bien *cuerpo poliedro*.

Cuando el cuerpo consta de cuatro caras, se llama en particular *tetraedro*; cuando de seis, *exaedro*; cuando de ocho, *octaedro*; cuando de doce, *dodecaedro*; y cuando de veinte, *icosaedro*, &c.

La interseccion comun de dos caras adyacentes de un poliedro, se llama *lado* ó *arista* del poliedro.

Cuando el poliedro tiene dos caras opuestas iguales y paralelas, y las demas caras son paralelógramos, se llama *prisma*; los dos planos paralelos é iguales, se llaman *bases* del prisma; y los paralelógramos, *caras* del prisma; de donde resulta (375) que *todas las aristas de un prisma son iguales.*

382 Para concebir formado un cuerpo de esta especie, supongamos que ABCDE (fig. 111) sea un polígono cualquiera, y que en un plano paralelo al ABC &c. se tiren las líneas FG, GH, HL, &c. iguales y paralelas á los lados AB, BC, CD, &c. con esto se formará un polígono FGHLK igual al ABCDE; y si despues se unen los vértices de los ángulos homólogos por medio de las rectas AF, BG, CH, &c. las caras ABGF, BCHG, &c. serán paralelógramos; y el cuerpo ABCDEKFGHL formado de este modo será un prisma, cuyas bases son ABCDE, FGHLK.

Se llama *altura* del prisma la perpendicular tirada desde una de las bases á la opuesta ó á su prolongacion; cuando las aristas del prisma son perpendiculares á la base, el prisma se llama *recto*, como el ABCDHFEG (fig. 112); y cuando esto no se verifica, es *oblicuo*, como el ABCDEKFGHL (fig. 111).

383 El prisma se llama *triangular*, *cuadrangular pentagonal exagonal*, &c. segun sea la base triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, &c.

Como hay diferentes especies de cuadriláteros resulta que el prisma cuadrangular recibe diferentes nombres; así, cuando la base es un paralelógramo, se llama *paralelepípedo*; cuando es romboide, *prisma romboidal*; cuando rombo, *prisma rombal*; cuando la base es un rectángulo, *prisma rectangular*; y

cuando la base es un cuadrado y la altura es el mismo lado del cuadrado, se le llama *cubo*.

384 Teor. *Dos poliedros no pueden tener los mismos vértices, y en el mismo número, sin coincidir el uno con el otro.*

Dem. Porque si suponemos construido uno de ellos, y se quiere construir otro que tenga los mismos vértices y en el mismo número, cada plano de los que formen el segundo tendrá con su correspondiente en el primero, tantos puntos comunes como ángulos haya en la cara del poliedro; y como en cada cara ha de haber lo menos tres ángulos, resulta que todas las caras coincidirán, y por consiguiente los poliedros quedarán confundido en uno solo. L. Q. D. D.

385 Teor. *Dos prismas son iguales, cuando tienen un ángulo sólido igual comprendido por tres planos, iguales cada uno al suyo y semejantemente colocados.*

Espl. Sean ABCL, *abcl* (fig. 111) dos prismas que tengan el ángulo sólido B=al *b*; y ademas los planos que le forman respectivamente ABCDE=*abcde*, ABGF=*abgf*, y BCHG=*bchg*; digo que estos prismas son iguales.

Dem. Concibiendo el ángulo sólido B superpuesto al *b*, se confundirán (380 cor.) por ser iguales; y por ser iguales los planos que los forman, se confundirán exactamente ABCDE con *abcde*, ABGF con *abgf*, y BCHG con *bchg*; luego el lado GF caerá sobre su igual *gf*, GH sobre *gh*, y toda la base superior FGHLK sobre su igual *fghlk*; luego los dos prismas ABCL, *abcl*, tienen los mismos vértices; luego (384) se confundirán; luego son iguales. L. Q. D. D.

386 Teor. *En todo paralelepípedo los planos opuestos son iguales y paralelos; y recíprocamente si un poliedro está terminado por seis planos paralelos de dos en dos, es un paralelepípedo.*

Dem. Por ser paralelepípedo, las bases ABCD, EFGH (fig. 113) son paralelógramos iguales y pa-

ralelos. Pero AD es igual y paralela á BC, y AE igual y paralela á BF; luego (376) el ángulo DAE= CBF, y el plano DAE paralelo á CBF; luego (313) el paralelógramo DAEH= al CBFG; y como demostraríamos lo mismo de los paralelógramos ABFE, DCGH, resulta L. 1.° Q. D. D.

Ahora, si suponemos que los seis planos sean paralelos, esto es, que AF paralelo á DG, AH á BG, y AC á EG, se tendrá que las comunes intersecciones de los planos AF, DG con el AC, serán dos líneas AB, DC paralelas (373). Las AD, BC, comunes secciones de los planos paralelos AH, BG con el AC, serán paralelas; luego la figura AC es un paralelógramo.

Del mismo modo demostraríamos que todas las demas caras lo son; pero el AF da (§ 313) AB igual y paralela á la EF; el BG da BC igual y paralela á FG; de donde se deduce (376) que el ángulo EFG= ABC y el paralelógramo ABCD=EFGH; luego dicho cuerpo es un paralelepípedo. L. 2.° Q. D. D.

387 Teor. *Si los ángulos homólogos opuestos de las bases de un paralelepípedo recto, se unen por medio de las diagonales DB, HF, el plano DBFH que pase por ellas, dividirá al paralelepípedo ABCDHEFG en dos prismas ABDHEF, DBCGHF iguales.*

Dem. La naturaleza del paralelepípedo da ABCD=EFGH, y por lo mismo ABD=DBC= EFH=FGH; luego el ángulo sólido en C será igual al en E, pues el ángulo BCG=AEH por rectos, el GCD=AEF por la misma razon, y el BCD=HEF por la igualdad de dichos triángulos. Por otra parte (386) las caras BCGF, DCGH son respectivamente iguales á AEHD, AEFG; luego (385) los dos prismas triangulares son iguales. L. Q. D. D.

Cor. *Luego el prisma triangular ABDHEF es la mitad del paralelepípedo ABCDHEFG, que tiene la misma altura, y cuya base ABCD es dupla de la ABD del primero.*

388 Teor. *Si dos paralelepípedos tienen una base*

comun, y sus bases opuestas en un mismo plano y entre unas mismas paralelas, estos paralelepípedos serán equivalentes, ó iguales en volúmen.

Espl. Sean AG, AL (fig. 114) dos paralelepípedos que tienen la base comun ABCD, y las opuestas EFGH, NKLM en un mismo plano HK y entre las paralelas EK, HL; voy á demostrar que el paralelepípedo AG= al AL.

Dem. El paralelepípedo AG da ABCD=EFGH, el AL da ABCD=NKLM, luego EFGH=NKLM; y añadiendo á ambos miembros la parte FNMG resultará EFGH+FNMG=NKLM+FNMG, ó reduciendo se tendrá ENMH=FKLG; ademas el primero da AEHD=BFGC; y por lo dicho (350) se deduce el triángulo AEN=BFK. Luego los prismas triangulares AENMHD, BFKLFC tienen los ángulos sólidos E, F formados por tres planos iguales; luego (385) dichos prismas son iguales.

Ahora, si del poliedro total AEL se quitan dichos prismas, los residuos serán iguales, y se tendrá. AEL—AEM=AEL—BFL, ó paralelepípedo AL= al AG, que es L. Q. D. D.

389 Teor. *Dos paralelepípedos de la misma base y altura son iguales en volúmen, ó son equivalentes.*

Dem. Porque si suponemos que ABCD (fig. 115) sea la base comun de los dos paralepípedos AG, AL, resulta que por tener una misma altura, sus bases superiores EFGH, RKLM se hallarán sobre un mismo plano. Ahora, si se conciben prolongados los planos ABFE, DCGH, y los ADMR, BCLK hasta que se encuentren, formarán por su comun interseccion un tercer paralelepípedo que tendrá la misma base ABCD, y cuya base opuesta estará representada por el paralelógramo NOPQ. Pero este tercer paralelepípedo es igual (388) en volúmen al AG; pues teniendo la misma base inferior, las superiores están en un mismo plano y entre las paralelas GQ y FN; y por una razon semejante este tercer paralelepípedo será igual con el AL; luego AG=AL, que es L. Q. D. D.

390 Teor. *Todo paralelepípedo se puede convertir en uno recto y rectángulo de igual volúmen, que tenga la misma altura y una base equivalente.*

Dem. Porque si AG es el paralelepípedo propuesto, y desde los puntos A, B, C, D, se tiran las AR, BK, CL, DM, perpendiculares al plano de la base, tendrémos formado el paralelepípedo recto AL, igual en volúmen al AG. Luego si la base ADCD es un rectángulo, AL será el paralelepípedo recto y rectángulo equivalente al propuesto AG. Pero si ABCD (fig. 116) no es un rectángulo, se tirarán las AO, BN perpendiculares á CD, despues las perpendiculares OQ y NP á la base ABCD, con lo cual se tendrâ el poliedro ABNOQPKE que será un paralelepípedo recto y rectángulo. Y como los dos paralelepípedos AP, AL se puede reputar que tienen la misma base ABKE y la misma altura AO, resulta que son iguales en volúmen; luego el paralelepípedo oblícuo AG (fig. 115) que se habia reducido á un paralelepípedo recto equivalente AL, se encuentra de nuevo convertido en un paralelepípedo rectángulo AP, que tiene la misma altura AE, y cuya base ABNO es equivalente á la AB CD, que es L. Q. D. D.

391 Teor. *Toda seccion NOPQR* (fig. 111) *hecha en un prisma por un plano paralelo á la base ABCDE, es igual á esta base.*

Dem. Porque las partes AQ, BP, CO, &c. de paralelas comprendidas entre los planos paralelos ABC, NOP, son iguales (375); y así todas las figuras ABPQ, BCOP, &c. son paralelógramos.

De aquí se sigue que el lado PQ es igual y paralelo á AB, OP á BC, ON á CD, &c.; luego (376) el ángulo ABC=QPO, el BCD=PON, &c.; luego los dos polígonos ABCDE, NOPQR tienen los lados y los ángulos iguales respectivamente; luego son iguales. L. Q. D, D.

392 Teor. *La superficie lateral de un prisma es igual al producto de una de sus aristas por el períme-*

tro de una seccion perpendicular á dicha arista.

Dem. Si el prisma fuese el $abck$ (fig. 111), su superficie lateral seria igual á la de todas las caras ag, bh, cl, dk, ef; pero si por un punto cualquiera de una de las aristas se hace pasar un plano $nopqr$ perpendicular á dicha arista, será perpendicular á todas las demas (370); luego el paralelógramo $ag= gb\times pq$ el $bh=ch\times op$, el $cl=dl\times no$, el $dk=ke\times nr$, el $ef=ek\times qr$; y como todas las aristas af, bg, ch, dl, ek son iguales, se tendrá que sup. lat. de prisma $abcdk=$ á la de los paralelógramos $ag+bh+cl+dk+ef= bg\times pq+ch\times op+dl\times no+ke\times nr+ek\times qr$; sustituyendo bg á las demas aristas, y sacándola fuera de un paréntesis como factor comun, resultará sup. lat. de prisma $abck=bg\,(pq+op+no+nr+rq)=bg\times$ perim. de sec. $nopqr$, que es L. Q. D. D.

Cor. Si el prisma es recto, la seccion será paralela é igual á la base, y por lo mismo *la superficie lateral de un prisma recto es igual al perímetro de la base multiplicado por su arista ó altura, que es lo mismo.*

393 Teor. *Dos paralelepípedos rectos AG*, ag (fig. 112), *de iguales bases ABCD*, abcd, *son entre sí como sus alturas AF*, af, *ó se tendrá AG*:ag::*AF*:af.

Dem. Aquí pueden ocurrir dos casos, ó que las alturas sean comensurables, ó que no lo sean.

1.° Si tienen la comun medida $AX=ax$, y espresamos por m, n, las veces que está contenida en cada una de ellas, se tendrá $AF=m\times AX$, y $af=n\times ax$; y formando proporcion y simplificando por $AX=ax$ será $AF:af::m\times AX:n\times ax::m:n$.

Si por los puntos de division X, Z, &c., x, z, &c., se tiran planos paralelos á las bases, el paralelepípedo AG quedará dividido en m paralelepípedos iguales con AU, y el ag en n iguales con $au=AU$, y todos iguales entre sí (389); y se tendrá $AG=m\times AU$, $ag=n\times au=n\times AU$; y formando proporcion será $AG:ag::m\times AU:n\times au::m:n$.

Esta proporcion y la anterior dará (§ 184, 2.ª) AG:*ag*::AF:*af*, que es L. 1.° Q. D. D.

2.° Si las alturas son incomensurables, se demuestra por un procedimiento semejante al que hemos seguido (352), que la razon de AG:*ag* no puede ser mayor ni menor que AF:*af*; luego será igual. L. 2.° Q. D. D.

394 Aunque hemos dicho en el teorema anterior que los paralelepípedos han de ser rectos, y en los dos siguientes decimos rectángulos, es por la mayor facilidad en las construcciones; pues las proposiciones se verifican en cualesquiera paralelepípedos. Porque segun hemos visto (390), todo paralelepípedo se puede convertir en uno recto y rectángulo igual en volúmen; luego lo que se demuestre de estos quedará demostrado de aquellos.

395 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos AG, AK* (fig. 117) *de una misma altura AE, son entre sí como sus bases ABCD, AMNO, ó se tendrá*

AG:AK::ABCD:AMNO.

Dem. Habiendo colocado el uno al lado del otro como representa la figura, prolónguese el plano ONKL hasta que encuentre al DCGH, cuya comun seccion sea PQ; y tendrémos un tercer paralelepípedo AQ, que se podrá comparar con cada uno de los AG, AK. Los AG, AQ que tienen la misma base AEHD, dan AG:AQ::AB:AO; igualmente los paralelepípedos AQ, AK, que tienen la misma base AOLE, dan AQ:AK::AD:AM; multiplicando ordenadamente y omitiendo (191) el factor comun AQ, será AG:AK::AB×AD:AO×AM; pero AB×AD representa (353 esc.) la base ABCD, y AO×AM representa la AMNO; luego AG:AK::ABCD:AMNO; que es L. Q. D. D.

396 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas, ó como los productos de sus tres dimensiones.*

Dem. Porque habiendo colocado los dos paralelepípedos AG, AZ (fig. 117), de manera que sus superficies tengan el ángulo comun BAE, prolónguense los planos necesarios para formar el tercer paralelepípedo AK, de la misma altura que el AG, y (395) se tendrá AG:AK::ABCD:AMNO; pero (393) los dos paralelepípedos AK, AZ, que tienen la misma base AMNO, dan AK:AZ::AE:AX; luego multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y omitiendo el factor comun AK, se tendrá

$$AG:AZ::ABCD\times AE:AMNO\times AX;$$

y sustituyendo en vez de las bases ABCD, AMNO, sus valores $AB\times AD$ y $AO\times AM$, será

$$AG:AZ::AB\times AD\times AE:AO\times AM\times AX,$$

que es L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *se puede tomar por medida de un paralelepípedo rectángulo el producto de su base por su altura, ó el producto de sus tres dimensiones*; con tal que por esta espresion se entienda *el producto de los números de unidades lineales que contiene cada una.*

397 Para medir los volúmenes se ha elejido por unidad el cubo, cuyo lado sea tambien la unidad, esto es, 1 vara, 1 pie, &c. Así, si el cubo *a* (fig. 118) es el de una vara, y suponemos que está contenida la vara en BC siete veces, en CD dos, y en CG cuatro, el paralelepípedo rectángulo CF será *vol.*CF$=7\times2\times4$ varas cúbicas $=56$ varas cúbicas, ó 56 cubos iguales con el *a* que se tomó por unidad: como lo manifiesta la figura.

398 Teor. *El volúmen de un paralelepípedo, y en general el volúmen de un prisma cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

Dem. Porque 1.° un paralelepípedo cualquiera equivale (390) á uno recto y rectángulo de la misma altura y de una base equivalente. Pero el volúmen de este se halla multiplicando su base por su altura, luego el volúmen del primero es del

mismo modo igual al producto de su base por su altura.

2.º Todo prisma triángular es la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y de dupla base; y como el volúmen de este es igual á su base multiplicada por su altura, resulta que la del prisma triángular es igual al producto de su base, mitad de la del paralelepípedo, multiplicada por su altura.

3.º Un prisma cualquiera se puede dividir en tantos prismas triángulares de la misma altura, como triángulos se pueden formar en el polígono que le sirve de base. Pero el volúmen de cada prisma triángular es igual á su base multiplicada por su altura; y como la altura es la misma para todos, se sigue que la suma de todos los prismas parciales será igual á la suma de todos los triángulos que les sirven de bases, multiplicada por la altura comun.

Luego el volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura. L.Q.D.D.

Cor. Luego *los prismas que tengan bases y alturas iguales serán equivalentes, ó iguales en volúmen.*

De la pirámide y medicion de su superficie y volúmen.

399 Se llama *pirámide* un poliedro que tiene por base una figura cualquiera, y cuyas caras son triángulos que tienen un ángulo en un mismo punto, llamado *cúspide* ó *vértice* de la pirámide; tal es el SABCDE (fig. 119) en que el polígono ABCDE es la base de la pirámide, S su cúspide ó vértice, y los triángulos ASB, BSC, CSD, &c. las caras. Toda línea SO (figs. 119 y 120) que desde el vértice se tire perpendicularmente á la base ó á su prolongacion, se llama *altura* de la pirámide.

Una pirámide es *triángular*, *cuadrangular*, &c. segun la base es un triángulo, cuadrilátero, &c.

Cuando el polígono de la base es regular, y ademas la línea que desde el cúspide va al centro del polígono es perpendicular á la base, la pirámide se llama *regular*; y cuando le falta alguna de estas dos circunstancias, se llama *irregular*. En la regular se llama *apotema* la perpendicular SK (fig. 119), que desde el cúspide S se tira en una de las caras al lado AB de la base.

400 Teor. *En toda pirámide regular los triángulos laterales ASB, BSC, CSD, &c.* (fig. 119) *son isósceles é iguales entre sí.*

Dem. Por suponerse la pirámide regular, la SO será perpendicular al plano ABCDE, y los radios oblicuos AO, OB, &c. serán iguales; luego (368) las oblicuas SA, SB, SC, &c. son iguales; luego los triángulos SAB, SBC, &c. son isósceles; y como ademas tienen iguales los lados, CB, BC, &c. de la base, se infiere que ademas de ser isósceles son (259) iguales. L. Q. D. D.

Cor. Si se conciben planos por la altura SO y por cada una de las aristas, *quedará dividida la pirámide en tantas pirámides triángulares iguales* (384) *como lados tiene la base*; y como aunque la pirámide sea irregular, se puede dividir su base desde un punto cualquiera de ella, en tantos triángulos como lados tiene, concibiendo planos por cada arista y por la línea que une dicho punto con el vértice, *quedará dividida la pirámide en tantas triángulares como lados tiene.*

401 Teor. *La superficie lateral* S *de toda pirámide regular es igual al perímetro* P *de la base por la mitad de la apotema, que llamarémos* Ap., *ó se tendrá* $S = P \times \frac{1}{2}Ap.$

Dem. Por ser regular la pirámide, todos los triángulos laterales serán iguales, y por lo mismo la superficie lateral equivaldrá á tantas veces uno de ellos como caras tiene la pirámide; y como esta tiene tantas caras como lados la base, resulta que llamando *n* al número de lados de la base, será

$S=n\times$triángulos; pero la superficie de un triángulo tal como el ASB se halla multiplicando la mitad de la apotema *Sk* ó *Ap.* por el lado AB, que llamarémos *L*; luego la superficie de uno de los triángulos laterales será $L\times\frac{1}{2}Ap.$, lo que dará $S=n\times L\times\frac{1}{2}Ap.=nL\times\frac{1}{2}Ap.$; y como $nL=P$, se tendrá $S=P\times\frac{1}{2}Ap.$ que es L. Q. D. D.

Esc. Si á la espresion de la superficie lateral añadimos la de la base, se tendrá la superficie total de la pirámide. Cuando la pirámide ó cualquier otro poliedro es irregular, se halla separadamente la superficie de cada cara, y su suma será la superficie del poliedro.

402 Teor. *Si una pirámide SABCD (fig. 121) se corta con un plano paralelo á la base ABCD, se verificarán tres cosas: 1.ª Este plano cortará á todas las aristas SA, SB, SC, &c. en partes proporcionales; que tendrán unas con otras la misma razon que las de otra recta SE, tirada desde el vértice de la pirámide al plano de la base; y la misma razon tambien que dos lados homólogos cualesquiera AB,* ab, *de la base y de la seccion. 2.ª La seccion* abcd *será semejante á la base ABCD. 3.ª La superficie de la base ABCD tendrá con la* abcd *de la seccion, la misma razon que los cuadrados de las líneas SE Se.*

Dem. 1.ª Si por la recta SE y por las aristas de la pirámide, se conciben los planos SEA, SEB, SEC, &c. estos cortarán á la seccion *abcd* en las líneas *ea*, *eb*, &c. que serán paralelas (373) á las EA, EB, &c. luego (328) los triángulos ASE, BSE, ASB, BSC, &c. serán semejantes á sus correspondientes *aSe*, *bSe*, *aSb*, *bSc*, &c. y darán

SE:S*e*::SA:S*a*::SB:S*b*::SC:S*c*::&c.:&c.::AB:*ab*::BC:*bc*.

2.ª Una vez que los triángulos AEB, BEC, CED, &c. en que está dividida la base ABCD, tienen sus lados respectivamente proporcionales á los de los triángulos *aeb*, *bec*, *ced*, &c. en que está dividida la seccion *abcd*, resulta que todos estos triángulos son semejantes unos á otros (329); luego las

dos figuras ABCD, *abcd*, tambien lo serán (341).

3.a Y por ser semejantes las figuras ABCD, *abcd*, serán entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas (357 esc. 1.°) y por lo mismo

$$ABCD:abcd::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2,$$

que es L. Q. D. D.

Cor. Luego *si se cortan dos pirámides SABCD, SFGH* (fig. 122) *de iguales alturas SE, SE′, con un plano paralelo al de sus bases, las secciones* abcd, fgh, *tendrán una con otra la razon de las bases ABCD, FGH; y si estas son iguales, tambien lo serán las secciones.* Porque por lo demostrado últimamente, será $ABCD:abcd::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2$; por la misma razon $FGH:fgh::SE'^2:Se'^2$; pero $SE=SE'$ por el supuesto, y como el plano es paralelo á las bases, cortará partes iguales de las alturas; luego siendo Ee, $E'e'$ iguales, los residuos Se, Se' serán iguales, y por lo mismo las dos proporciones de arriba tendrán igual la última razon; y formando proporcion con las otras dos será $ABCD:abcd::FGH:fgh$, ó $ABCD:FGH::abcd:fgh$; luego si $ABCD=FGH$, resultará $abcd=fgh$, que es L. Q. D. D.

Esc. Se dice de dos pirámides que son *semejantes*, cuando sus bases son semejantes, y tienen todas las líneas homólogas proporcionales; y como todas las de la pirámide SABCD son proporcionales con las de la S*abcd*, y ABCD es semejante á *abcd*, resulta que la pirámide quitada ó *deficiente* S*abcd*, es semejante á la SABCD.

403 La parte ABCD*abcd* que queda, se llama *tronco* ó *trozo* de pirámide, ó pirámide *truncada*; y cuando la pirámide de que resulta el trozo es regular, *su superficie lateral se halla multiplicando la parte de la apotema comprendida entre las dos bases opuestas, por la semisuma de los perímetros de las bases paralelas, ó por el perímetro de una seccion hecha á distancias iguales de las bases paralelas.*

Dem. Porque observando que todos los trapecios tendrán una misma altura Kk (fig. 121) será

Sup. lat. de trozo $ABCDadcb = Ab + Bc + Cd + Da =$ (§ 356) $kKx\frac{AB+ab}{2} + kKx\frac{BC+bc}{2} + kKx\frac{CD+cd}{2} +$ $kKx\frac{DA+da}{2} = kKx\frac{AB+ab+BC+bc+CD+cd+DA+da}{2} =$ $kKx\frac{\text{perím.}ABCD+\text{perím.}abcd}{2}$; y como (§ 356 esc.) $\frac{AB+ab}{2} = mn, \frac{BC+bc}{2} = no, \frac{CD+cd}{2} = op$, y $\frac{DA+da}{2} = pm$, resulta:

Sup. lat. de trozo $= kKxmn + kKxno + kKxop + kKxpm = kK\times(mn+no+op+pm) = kK\times$perím. de sec. equidistante de las bases paralelas. L. Q. D. D.

404 Teor. *Á toda pirámide se le puede inscribir y circunscribir un número de prismas, de manera que la diferencia entre la suma de los circunscritos y la de los inscritos sea menor que cualquier cantidad dada.*

Dem. Sea SABC (fig. 123) la pirámide propuesta, si se divide la altura en un número cualquiera de partes iguales, v. g. en 4, y por los puntos de division se conciben planos paralelos á su base, se tendrá dividida la pirámide en otra SQRT, y en tantos trozos QRTNMX, XMNHGF, FGHCBA, como partes tenia la altura ménos una. Concibiendo ahora un prisma ZVSTRQ, que tenga la misma base y altura que la pirámide, y en cada trozo dos prismas de la misma altura que él, que el uno tenga por base la mayor del trozo y el otro la menor, se tendrá el número de prismas circunscritos ZVSTRQ, OPTNMX, LKNHGF, DEHCBA, y el de los inscritos QRTN*ml*, XMNH*gf* FGHC*ba*; pero el primer prisma circunscrito ZVSTRQ es igual (398 cor.) con el primer inscrito QRTN*ml*; el segundo circunscrito con el segundo inscrito, y el tercero con

el tercero; luego la diferencia entre la suma de los circunscritos é inscritos estará representada por el último circunscrito DEHCBA; y si inscribiéramos y circunscribiéramos duplo número de prismas, el último circunscrito que espresaria la diferencia, seria dos veces menor que el DEHCBA; y como continuando del mismo modo, el último prisma circunscrito que espresa la diferencia, va haciéndose dos veces menor, al cabo de cierto tiempo llegará (229) á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D.

Cor. Siendo el volúmen de la pirámide mayor que la suma de los prismas inscritos, y menor que la de los circunscritos, *con mas razon se le podrá inscribir ó circunscribir un número de prismas, de modo que la diferencia entre la suma de cualesquiera de estos y el volúmen de la pirámide, sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

405 Teor. *Dos pirámides de igual base y altura son iguales en volúmen.*

Dem. Sean SABC, S′A′B′C′ las dos pirámides; si se concibe dividida su altura en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division se hacen pasar planos, las secciones que causen estos planos serán iguales (402 cor.); concibiendo ahora un prisma circunscrito á cada una de las partes en que quedan divididas las pirámides, y llamando S la suma de los prismas circunscritos á SABC, y S' á la de los circunscritos á S′A′B′C′, se tendrá $S=S'$, pues cada prisma de la SABC es igual (398 cor.) con el correspondiente de la S′A′B′C′; pero S se puede acercar (404 cor.) á SABC, y S' á S′A′B′C′ tanto como se quiera; luego tenemos aquí dos cantidades S, S', variables, pero siempre iguales, que se pueden acercar á las dos constantes SABC, S′A′B′C′ tanto como se quiera; luego (231 cor.) estas constantes son iguales, y se tiene SABC=S′A′B′C′, que es L. Q. D. D.

406 Teor. *Todo prisma triángular ABCFDE*

(fig. 124), *se puede dividir en tres pirámides equivalentes.*

Dem. Si por las diagonales AD, AF de dos caras contiguas del prisma, se concibe un plano, quedará dividido el prisma en dos pirámides una triangular, ADEF (fig. 125), cuya base DEF y la altura AE serán las mismas que las del prisma: y la otra cuadrangular (fig. 126) que tendrá por base á la otra cara del prisma, y por altura á la altura del triangulo BAC de la base. Si por las aristas DA, AC de esta se concibe un plano DAC, su comun seccion con el BCFD, será la diagonal DC, por lo que dicha pirámide quedará dividida en otras dos triangulares ABCD, ACDF, que tendrán bases iguales (313, 1.°), y una misma altura por tener su vértice comun en A; por lo cual estas dos pirámides serán iguales en volúmen. Ahora, la pirámide DBAC se puede considerar que tiene por base al triángulo BAC, que es una de las bases del prisma, y por altura la misma que la del prisma; y como las dos bases opuestas de un prisma son iguales, resulta que las dos pirámides DBAC y ADEF (fig. 125) son iguales tambien en volúmen; luego las tres pirámides son iguales en volúmen. L. Q. D. D.

Cor. 1.° *Toda pirámide triangular es el tercio de un prisma triangular de igual base y altura*; porque equivaliendo el prisma BACFED (fig. 124) á tres pirámides iguales con la ADEF, cada una de estas será el tercio del prisma; y como podemos concebir á toda pirámide dividida en tantas pirámides triangulares como lados tiene su base, y cada una será el tercio del prisma de igual base y altura, resulta, que en general *toda pirámide, de cualquier clase que sea, es igual á la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

Cor. 2.° Luego siendo el volúmen del prisma (398) igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, *el de la pirámide será igual a la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura.*

De los poliedros regulares, ó de los cinco cuerpos regulares.

407 Se llaman *poliedros regulares* aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son todos iguales entre sí.

De estos sólo hay los cinco siguientes, á saber: el *tetraedro* (fig. 127) que es un cuerpo terminado por cuatro triángulos equiláteros iguales; el *octaedro* (fig. 128) que está terminado por ocho triángulos equiláteros iguales; el *icosaedro* (fig. 129) que está terminado por veinte triángulos iguales; el *exaedro* ó cubo (fig. 130) que está terminado por seis cuadrados iguales; y el *dodecaedro* (fig. 131) que está terminado por doce pentágonos iguales.

Para hallar su superficie, se halla la de una cara, y se multiplica por el número de ellas.

Para encontrar su volúmen, observarémos que siendo el tetraedro une pirámide, le hallarémos conforme lo hemos dicho (406 cor. 2.º); el octaedro no viene á ser otra cosa que dos pirámides cuadrangulares reunidas por su base, y la regla que acabamos de citar nos dará su volúmen; y siendo el exaedro un cubo nos servirá la regla dada (398).

Ahora, para hallar el volúmen del dodecaedro y del icosaedro, los considerarémos como compuestos de tantas pirámides como caras tienen, cuya base sea cada cara, y la altura la mitad de la distancia que hay entre dos caras opuestas.

De los tres cuerpos redondos.

408 Se llama *cuerpo redondo* ó de revolucion, el que está terminado por una superficie que no presenta esquinas ó ángulos sólidos.

Se llama *cilindro* un cuerpo cuyas dos bases opuestas son dos círculos iguales y paralelos, y cuya superficie lateral es convexa; tal es el EFCD (fig. 132);

la línea AB que une los dos centros, se llama su *eje*; cuando el eje es perpendicular á las bases, el cilindro es *recto*; cuando no, *oblícuo*, tal como el EFCD (fig. 133); en cuyo caso la *altura* es la perpendicular DO tirada desde un punto cualquiera de la base superior á la inferior ó á su prolongacion.

El cilindro recto se puede concebir orijinado de la revolucion de un rectángulo ABCD (fig. 132) al rededor del lado inmóvil AB; con este movimiento los lados AD, BC describen los círculos iguales DHP, CGQ, que son las bases del cilindro; el lado CD describe su superficie lateral, y la línea AB es el eje del cilindro.

El cilindro oblícuo se puede considerar formado del movimiento de un círculo FGCQ (fig. 133) paralelamente á sí mismo en la direccion de la línea CD.

409 Se dice que un poliedro cualquiera está *inscrito* en un cuerpo redondo, cuando todos los vértices de sus ángulos sólidos se hallan en la superficie del cuerpo; y que está *circunscrito*, cuando todas sus caras son tangentes del mismo cuerpo, ó sólo tiene de comun con él una recta, estando todo lo demas de la cara fuera.

410 Teor. *Toda seccion MLKN* (figs. 132 y 133) *hecha en un cilindro paralela á las bases, es un círculo igual á las bases.*

Dem. Por ser el plano MLK paralelo á la base FGC, se tiene (§ 375) FM=BS=KC=&c.; luego si se concibe un número cualquiera de planos EABF, HABG, &c. que pasen por el eje AB, todas las figuras FBSM, GBSL, &c. serán paralelógramos (311), que darán FB=MS, GB=LS, &c. pero FB=GB=&c.; luego MS=LS=&c.; luego todos los puntos de la seccion distan igualmente de S, y por lo mismo es un círculo; y como su radio es igual al de la base, resulta que el círculo seccion será igual al de la base, L. Q. D. D.

411 Teor. *Si en el cilindro recto se inscriben y circunscriben dos prismas, la superficie del cilindro*

es mayor que la del inscrito, y menor que la del circunscrito; y la diferencia entre la superficie del circunscrito y la del inscrito podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Dem. 1.º Sea p el perímetro de la base del prisma inscrito, cuya superficie lateral espresarémos por ϖ; y como su arista será el mismo lado L del cilindro, tendrémos (§ 392 cor.) $\varpi = p \times L$ (m).

Ahora, si aumentase el número de lados, creceria (308) el perímetro p, y por consiguiente tambien creceria la superficie ϖ; y como el prisma que tenga mas lados, tendrá mas aristas comunes con la superficie del cilindro, y ademas la superficie de dicho prisma se hallará entre la del cilindro y la del prisma que tenga ménos, resulta que ϖ es una cantidad variable, que al paso que crece se acerca á la superficie convexa del cilindro, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si espresamos por P el perímetro de la base del prisma circunscrito, y por Π su superficie lateral, se tendrá $\Pi = P \times L$ (n).

Ahora, si el número de lados de la base aumenta, P disminuye (308), y por consiguiente tambien disminuirá la superficie Π; pero el prisma que tiene mas lados se acerca mas á la superficie del cilindro, por tener mas aristas comunes con ella, y estar la superficie de dicho prisma entre la del cilindro y la del prisma que tiene ménos lados; luego Π es una cantidad variable, que al paso que mengua se acerca á una constante, que es la superficie del cilindro; luego (228) esto es menor que aquella. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si restamos las (ecs. m, n), se tendrá

$$\Pi - \varpi = P \times L - p \times L = (P - p)L.$$

Y como $P-p$ puede llegar (345) á ser menor que cualquier cantidad dada, se sigue (229 cor. 3.º) que tambien podrá llegarlo á ser la diferencia $\Pi - \varpi$ entre las superficies de dichos prismas. L. 3.º Q. D. D.

Cor. Luego *con mas razon se podrá circunscribir*

ó inscribir un prisma á un cilindro, de manera que la diferencia entre sus superficies sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

412 Teor. *La superficie convexa de un cilindro recto, que llamarémos* G, *es igual al producto de la circunferencia* C *de su base por su lado*, ó G=C×L.

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá $\Pi=P\times L$; pero al paso que aumenta el número de lados, disminuye dicha superficie Π y se va acercando á G, de modo que su diferencia puede llegar (411 cor.) á ser menor que cualquier cantidad dada, y como al mismo tiempo el producto $P\times L$ se acerca á $C\times L$, pues P se puede acercar (345 cor.) á C tanto como se quiera, y el factor L es comun, resulta que las dos cantidades variables Π y $P\times L$, siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes G y $C\times L$; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene $G=C\times L$, que es L. Q. D. D.

Cor. Si en vez de C se sustituye su valor (347), se tendrá $G=3{,}14159\times D\times L=\pi DL=2\pi RL$, que es la fórmula general de donde se deduce la superficie del semicilindro, cuadrante de cilindro, &c.

413 Teor. *Á un cilindro recto se puede inscribir y circunscribir un prisma tal, que la diferencia entre el volúmen del circunscrito y del inscrito sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sean ahora Π' y ϖ' los volumenes de dos prismas circunscrito é inscrito á un cilindro, que tambien llamarémos G; P', p' las superficies de sus bases, y A su altura comun, que es la misma que la del cilindro, y (398) tendrémos $\Pi'=P'\times A$, $\varpi'=p'\times A$; que restando la una de la otra, resultará

$$\Pi'-\varpi'=P'\times A-p'\times A=(P'-p')\times A;$$

y como en este valor entra por factor $P'-p'$, que (358) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue (229 cor. 3.º) que lo mismo sucederá á $\Pi'-\varpi'$, que es L. Q. D. D.

Cor. Como el prisma inscrito es parte del cilindro, será menor que él; y como el circunscrito es todo respecto del mismo cilindro, será mayor que él. Luego *con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un prisma en el cilindro, de modo que la diferencia entre cualquiera de sus volúmenes y el del cilindro, sea menor que cualquier cantidad dada.*

414 Teor. *El volúmen de un cilindro* G *es igual á la superficie* C *del círculo de su base multiplicada por su altura* A, *ó se tendrá* G=C×A.

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, tendrémos respecto del prisma circunscrito $\Pi'=P'\times A$; pero si crece el número de lados, Π' se va acercando á G, de modo que su diferencia (413 cor.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo la espresion de Π', esto es, $P'\times A$, se puede acercar á $C\times A$ todo lo que se quiera, por hacerlo (358 cor.) P' á C y ser A comun, resulta que las dos cantidades variables é iguales Π' y $P'\times A$, se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes G y $C\times A$; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene $G=C\times A$, que es L. Q. D. D.

Cor. Si en vez de C (359 cor. 2.°) sustituimos su valor, se tendrá $G=\pi R^2 A$; de esta fórmula se deducen todas las que tienen relacion con el volúmen del cilindro, semicilindro, sector cilíndrico, &c.; y si se tuviese $A=R$, seria $G=\pi R^3$.

Esc. La demostracion anterior sirve tambien para el cilindro oblicuo.

415 Se llama *cono* un cuerpo (figs. 134 y 135) que tiene por base un círculo, y está terminado por una superficie curva que termina en un punto S llamado cúspide ó vértice del cono, tal es SCDBE; la línea que desde el cúspide va al centro de la *base*, se llama *eje* del cono; cuando el eje es perpendicular á la base, el cono es *recto* (fig. 134); y cuando no, *oblicuo* (fig. 135); en este se llama *altura* la perpendicular bajada desde el

cúspide á la base, ó á su prolongacion; en el recto la altura es el mismo eje.

El cono recto se orijina de un triángulo rectángulo SAB, que jira al rededor de un cateto inmóvil SA; pues en este movimiento el cateto AB describe la base BDCE, y la hipotenusa SB que se llama *lado* del cono, traza la superficie del cono.

416 Teor. *Toda seccion FKHL* (fig. 134 y 135) *hecha en un cono paralela á su base, es un círculo.*

Dem. Concíbanse por el eje SA los planos SAD, SAB, &c. cuyas intersecciones con los planos paralelos CDB, FKH, serán (375) líneas paralelas; por lo que los triángulos SAD, SAB, SAE, &c. darán SA:SG::AD:GK, SA:SG::AB:GH, SA:SG::AE:GL, &c., y como estas proporciones tienen comun la razon SA:SG, las otras serán iguales y darán AD:GK::AB:GH::AE:GL::&c.:&c.; pero los antecedentes son iguales por radios de la base; luego los consecuentes tambien lo serán, y se tendrá GK=GH=GL=&c. que manifiesta que distando todos los puntos de la seccion igualmente del G, dicha seccion será un círculo. L. Q. D. D.

417 La parte FCDBH comprendida entre la base y la seccion, se llama *tronco*, ó *trozo de cono*, ó *cono truncado*.

418 Teor. *Si en un cono recto se inscriben y circunscriben dos pirámides regulares, la superficie lateral del cono es mayor que la de la inscrita, y menor que la de la circunscrita; y la diferencia entre la superficie de la inscrita y la de la circunscrita podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada.*

Dem. 1.° Sea p el perímetro de la base de la pirámide inscrita, cuya superficie lateral espresarémos por ϖ, y sea l su apotema, y (401) tendrémos

$$\varpi = p \times \tfrac{1}{2} l \quad (m)$$

Ahora, si aumentase el número de lados, creceria (308) el perímetro p, y tambien creceria (368) la apotema l; luego tambien crecerá la superficie ϖ; y como la pirámide que tenga mas lados, tendrá mas aris-

tas comunes con la superficie del cono, y la superficie de dicha pirámide se hallará entre la del cono y la de la pirámide de menor número de lados, resulta que la cantidad variable ϖ, al paso que crece, se acerca á la superficie convexa del cono, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si espresamos por P el perímetro de la base de la pirámide circunscrita, por L su apotema, que será el mismo lado del cono, y por Π su superficie lateral, se tendrá $\Pi = PB \times \frac{1}{2}L$ (n.)

Ahora, si aumenta el número de lados de la base, la L permanecerá la misma, P disminuirá (308), y por consiguiente tambien disminuirá Π; pero la pirámide que tiene mas lados, se acerca mas á la superficie del cono, por tener mas aristas comunes con ella, y estar su superficie entre la del cono y la de la pirámide que tiene menos lados; luego Π es una variable que al paso que mengua, se acerca á una constante que es la superficie del cono; luego (228) esta es menor que aquella. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si restamos las (ecs. m, n) se tendrá

$\Pi - \varpi = P \times \frac{1}{2}L - p \times \frac{1}{2}l$;

pero p se puede acercar (345) á P y l á L todo lo que se quiera; porque l es una oblícua que se va separando cada vez mas de la perpendicular, que es el eje del cono, y L no varia; luego si la diferencia de los factores P, L y p, l, puede ser menor que cualquier cantidad dada, la de la mitad de sus productos, y de consiguiente la diferencia $\Pi - \varpi$, tambien lo podrá llegar á ser. L. 3.º Q. D. D.

Cor. Luego *con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir una pirámide á un cono, tal que la diferencia entre sus superficies sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

419 Teor. *La superficie lateral* G *de un cono recto es igual á la circunferencia* C *de su base por la mitad de su lado* L, *ó* $G = C \times \frac{1}{2}L$.

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá $\Pi = P\times\frac{1}{2}L$; pero al paso que aumenta el número de lados; disminuye dicha superficie Π, y se va acercando á G, de modo que su diferencia puede (418 cor.) llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, y como al mismo tiempo el producto $P\times\frac{1}{2}L$ se acerca á $C\times\frac{1}{2}L$, pues P se acerca (345 cor.) á C, y el factor $\frac{1}{2}L$ es comun, resulta que las dos cantidades variables Π y $P\times\frac{1}{2}L$, siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes G y $C\times\frac{1}{2}L$; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene $G = C\times\frac{1}{2}L$, que es L. Q. D. D.

Cor. Sustituyendo en vez de C su valor (347), será $G = \pi D\times\frac{1}{2}L = \pi\times 2R\times\frac{1}{2}L = \pi RL$; que es la fórmula general que da todas las que tienen relacion con la superficie del cono.

420 Como $C\times\frac{1}{2}L = \frac{1}{2}C\times L$, y si por el punto F medio del lado del cono se da una seccion paralela á la base, la circunferencia FKHL será la mitad de la CDBE, por ser su radio la mitad (322), se tendrá $G = \text{FKHL}\times L$; que quiere decir, que *la superficie lateral de todo cono recto es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo paralelo á la base, y tirado por el punto medio del lado.*

421 Lo dicho respecto del cono y las pirámides inscritas y circunscritas en él, se aplica del mismo modo al trozo de cono recto, y los trozos de pirámides inscritos y circunscritos á él; y se deduce que *la superficie lateral de todo trozo de cono recto es igual á su lado multiplicado por la semisuma de las circunferencias de las bases paralelas, ó á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo trazada equidistante de las bases paralelas*; ó lo que es lo mismo (fig. 134) superficie de trozo CDBELHKF $=$

$$\text{FC}\times\frac{\text{CDBE}+\text{FKHL}}{2} = \text{FC}\times \text{circunferencia MN};$$

y si en vez de las circunferencias sustituimos (347)

sus valores $2\pi\times CA$, $2\pi\times FG$, y sacamos el factor comun 2π, se tendrá sup. de trozo$=2\pi\times\frac{CA+FG}{2}\times FC$.

422 Teor. *Á todo cono se puede inscribir y circunscribir una pirámide, de modo que la diferencia entre su volúmen sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sean ahora Π' y ϖ' los volúmenes de dos pirámides circunscrita é inscrita al cono; P', p' las superficies de sus bases, y A su altura comun, que tambien es la del cono; y (406 cor. 2.°) tendrémos $\Pi'=P'\times\frac{1}{3}A$, $\varpi'=p'\times\frac{1}{3}A$; que restando la una de la otra resultará $\Pi'-\varpi'=P'\times\frac{1}{3}A-p'\times\frac{1}{3}A=(P'-p')\times\frac{1}{3}A$; y como en este valor entra por factor $P'-p'$, que (358) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, se sigue (229 cor. 3.°) que lo mismo sucederá á la diferencia $\Pi-\varpi'$, que es L. Q. D. D.

Cor. *Luego con mas razon se podrá inscribir y circunscribir al cono una pirámide tal que la diferencia entre su volúmen y el del cono sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

423 Teor. *El volúmen de todo cono recto* G *es igual á la superficie* C *de la base multiplicada por el tercio de la altura* A, *ó* $G=C\times\frac{1}{3}A$.

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá respecto de la pirámide circunscrita $\Pi'=P'\times\frac{1}{3}A$; pero si crece el número de lados, Π' se va acercando á G, de modo (422 cor.) que su diferencia puede ser tan pequeña como se quiera; y como al mismo tiempo la espresion de Π', ó $P'\times\frac{1}{3}A$ se puede acercar todo lo que se quiera á $C\times\frac{1}{3}A$, por hacerlo (358 cor.) P' á C y ser $\frac{1}{3}A$ comun, resulta que las dos cantidades variables é iguales Π' y $P'\times\frac{1}{3}A$, se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes G y $C\times\frac{1}{3}A$; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene $G=C\times\frac{1}{3}A$, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.° Sustituyendo en vez de C su valor, será

$G = \pi R^2 \times \frac{1}{3} A$; de esta fórmula general salen todas las que tienen relacion con el volúmen del cono.

Cor. 2.° Y como el volúmen de un cilindro de igual base y altura que el cono seria $C \times A$, *se sigue que todo cono es la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.*

Esc. El volúmen del trozo de cono CDBL se hallará *restando del cono total el volúmen del deficiente SFKH*; pero como cuando se da el trozo, no se conoce la altura total del cono, ni la del deficiente será necesario de antemano determinar esta. Para conseguirlo, sea A la altura del trozo, x la del deficiente, R el radio de la base inferior, r el de la superior, y los triángulos semejantes SAC, SGF darán $AC:FG::SA:SG$, ó $R:r::A+x:x$;

de donde sale $x = \frac{Ar}{R-r}$,

$$\text{y } SA = A + x = A + \frac{Ar}{R-r} = \frac{AR - Ar + Ar}{R-r} = \frac{AR}{R-r};$$

luego tendrémos vol. de trozo CDBL=cono SCDB−cono SFKH=

$$\pi R^2 \times \tfrac{1}{3} \times \frac{AR}{R-r} - \pi r^2 \times \tfrac{1}{3} \times \frac{Ar}{R-r} =$$

$$\pi \times \tfrac{1}{3} A \times \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \pi \times \tfrac{1}{3} A \, (R^2 + Rr + r^2).$$

424 Teor. *Si un triángulo ABC* (fig. 136) *jira al rededor del lado mayor AC, describirá un cuerpo cuyo volúmen será igual á la superficie que describe uno de los otros lados AB, multiplicada por el tercio de la perpendicular Cq tirada á dicho lado, ó á su prolongacion, desde el otro estremo C del lado que sirve de eje; ó lo que es lo mismo*
vol. $ABC = sup.\ AB \times \tfrac{1}{3} Cq$.

Dem. Si desde el punto B se concibe la perpendicular B*b* al eje, el cuerpo descrito por el triángulo

ABC, se compondrá de dos conos, cuya base comun será el círculo descrito por el radio Bb; luego (423) el volúmen de este cuerpo, ó volúmen ABC $=$ cono $CBb+$ cono $ABb=$ círc.° $Bb\times\frac{1}{3}Cb+$ círc.° $Bb\times\frac{1}{3}Ab=$ cír.°$Bb\times(\frac{1}{3}Cb+\frac{1}{3}Ab)=$ cír.°$Bb\times\frac{1}{3}CA$.

Esto supuesto (§. 359 cor. 2.°) círc.° $Bb=\pi Bb^2$, y (§ 419 cor.) sup. cono $AB=\pi\times Bb\times AB$; y formando proporcion y simplificando la segunda razon por $\pi\times Bb$, será

cir.°Bb:sup.cono $AB::\pi\times Bb^2:\pi\times Bb\times AB::Bb:AB$.

Ahora, los triángulos rectángulos ABb, CqA, tienen ademas el ángulo en A comun; luego son semejantes y dan $Cq:AC::Bb:AB$; y como esta proporcion y la anterior tienen comun la razon $Bb:AB$, darán

$$\text{círc.}^\circ\ Bb:\text{sup. cono } AB::Cq:AC=Cq\times\frac{\text{sup.cono } AB}{\text{circ.}^\circ\ Bb}.$$

Sustituyendo este valor de AC en el anterior del volúmen, y simplificando por círc.° Bb, se tendrá

$$\text{vol.}ABC=\text{círc.}^\circ Bb\times\tfrac{1}{3}Cq\times\frac{\text{sup.}AB}{\text{círc.}^\circ Bb}=\tfrac{1}{3}Cq\times\text{sup.}AB=$$

sup. $AB\times\frac{1}{3}Cq$, que es L. Q. D. D.

Esc. Si el triángulo que jirase fuese el $AB'C$, en cuyo caso la perpendicular al lado AB' cae fuera; en vez de los triángulos ABb, ACq; se compararian los $AB'b'$, ACq, y se deduciria lo mismo.

425 Si el triángulo fuese rectángulo como DUO (fig. 137), y jirase al rededor del punto O, permaneciendo la UO perpendicular á MN, *se verifica tambien la proposicion*, esto es, que vol. DUO$=$sup. $DU\times\frac{1}{3}OU$.

En efecto, concibiendo la DM perpendicular á MN, el volúmen del cuerpo enjendrado por DUO será igual al del cilindro engendrado por DUOM, menos el volúmen del cono engendrado por DMO, ó vol.DUO$=$vol.DUOM$-$vol.DMO$=$
círc.° $DM\times DU-$círc.° $DM\times\frac{1}{3}OM=$

$\text{círc.}^{\circ}DM\times(DU-\frac{1}{3}OM)=\text{círc.}^{\circ}OU\times(DU-\frac{1}{3}DU)=$ $\text{circ.}^{\circ}DM\times\frac{2}{3}DU=\pi\times DM^2\times\frac{2}{3}DU$; pero la superficie cilíndrica engendrada por DU (§ 412) ó sup. cilínd. $DU=\text{circunf.}\ DM\times DU=$ $2\pi\times DM\times DU$.

$$\text{que da } DU=\frac{\text{sup. } DU}{2\pi\times DM};$$

luego sustituyendo este valor de DU en la espresion anterior del volúmen, se tendrá

$$\text{vol. } DUO=\pi\times DM^2\times\tfrac{2}{3}\times\frac{\text{sup. } DU}{2\pi\times DM}=$$

$\frac{1}{3}DM\times\text{sup.}DU=\text{sup.}DU\times\frac{1}{3}OU$, que es L. Q. D. D.

Esc. Obsérvese que siendo los dos triángulos DUO, DOM iguales, el primero enjendra un volúmen duplo del del segundo; pues vol. $DOM=$ círc. $DM\times\frac{1}{3}OM$; y como entre los dos cuerpos valen el cilindro enjendrado por DUOM ó círc. $DM\times OM$, resulta que el del enjendrado por DUO será vol. $DUO=\text{círc. } OU\times\frac{2}{3}OM$.

426 Teor. *Si un polígono regular de un número par de lados, se hace jirar al rededor de un diámetro del círculo circunscrito á dicho polígono, trazará un cuerpo cuya superficie será igual á la circunferencia de uno de los radios rectos, multiplicada por el diámetro que sirve de eje: y su volúmen será igual á la superficie de dicho cuerpo, multiplicada por la tercera parte del radio recto de dicho polígono.*

Espl. Sea el polígono ABCDE &c. (fig. 138); digo que si jira al rededor del diámetro AF del círculo circunscrito, describirá un cuerpo, cuya superficie s será igual á la circunferencia de un radio recto Op multiplicada por dicho diámetro AF, ó se tendrá

$s=\text{circunf.}Op\times AF$;

y su volúmen v será igual á la superficie del cuerpo, multiplicada por la tercera parte del radio recto Op, ó se tendrá $v=\text{circunf. } Op\times AF\times\frac{1}{3}Op$,

Const. Concíbanse desde los estremos de cada la-

do y desde su punto medio, las perpendiculares pp', Bb, mn, Cc, Dd, &c. á la AF, y ademas los radios rectos Op, Om, Oq, &c; con lo cual el cuerpo descrito por el polígono al jirar, se compondrá del cono enjendrado por AB, y de los trozos de cono enjendrados por los lados BC, CD (este será cilindro) &c., y de otros tantos iguales respectivamente por la parte de abajo de Oq; por lo que hallando la superficie de cada uno de estos cuerpos y sumando, se tendrá la superficie pedida.

Lo mismo sucede con el volúmen; pero como la fórmula para hallar el del trozo del cono es muy complicada, para hacer aplicacion de ella, considerarémos el volúmen del cuerpo como compuesto del que enjendra el triángulo OBA, el OCB, el OCq, &c. y sus iguales por la parte inferior; y sumándolos todos, se tendrá el volúmen total.

Dem. 1.° La superficie del cono (420) enjendrado por AB es igual á $AB \times \text{circunf.}pp'$.

La del trozo enjendrado por BC es igual (421) á $BC \times \text{circunf.}mn$.

Y la del cilindro trazado por Cq es igual (412) á $Cq \times \text{circunf.}Oq$.

Del mismo modo se procederia si el polígono tuviese mas lados.

Ahora, los triángulos ABb, pOp' son rectángulos, el uno en b, y el otro en p'; ademas tienen el ángulo ABb del primero igual al pOp' del segundo porque tienen iguales medidas, á saber, el ABb la (304) mitad del arco Ab' que es igual con la mitad de AB, y la mitad de este es la medida del pOp'; luego (331 cor. 2.°) son semejantes, y darán $AB:Ab::Op:pp'::$ (§ 346) $\text{circunf.}Op:\text{circunf.}pp'$; de donde sale $AB \times \text{circunf.}pp' = Ab \times \text{circunf.}Op$. Los triángulos BCx, Omn, que tienen sus tres lados respectivamente perpendiculares, serán (331 cor. 4.°) semejantes, y darán $BC:Bx::Om:mn::\text{circunf.}Om:\text{circunf.}mn$; que da $BC \times \text{circunf.}mn = Bx \times \text{circunf.}Om$.

Observando ahora que $Op = Om = Oq =$ &c. por

radios rectos, y que $Bx=bc$, $Cq=Oc$, &c., sustituyendo en vez de los valores que teníamos ántes de las superficies, los que acabamos de sacar, y sumando, se tendrá sup. enjendrada por $ABCq=$
$Ab\times$circunf.$Op+bc\times$circunf.$Op+cO\times$circunf.$Op=$
circunf.$Op\times(Ab+bc+cO)=$circunf.$Op\times AO$; y como esta es la mitad de la superficie del cuerpo, duplicando el factor AO, se tendrá la del total, que será $=$circunf.$Op\times AF$, que es L. 1.° Q. D. D.

2.° Por lo demostrado (424) se tendrá vol.$ABO=$sup.$AB\times\frac{1}{3}Op$; el del triángulo BCO será igual al enjendrado por OCU, menos el enjendrado por OBU, ó lo que es lo mismo
vol.$BCO=$vol.$UCO-$vol.$UBO=$
sup $UC\times\frac{1}{3}Om-$sup.$BU\times\frac{1}{3}Om=$
$\frac{1}{3}Om\times($sup.$UC-$sup.$BU)=\frac{1}{3}Om\times$sup.BC. Del mismo modo se continuaria prolongando lados, si hubiese mas, hasta llegar al cuerpo enjendrado por OCq, cuyo volúmen (425) es, vol.$OCq=$sup.$Cq\times\frac{1}{3}Oq$.

Sumando todos estos volúmenes parciales, y observando que $Op=Om=Oq=$&c., se tendrá volúmen enjendrado por $ABCq=$
sup.$AB\times\frac{1}{3}Op+$sup.$BC\times\frac{1}{3}Op+$sup.$Cq\times\frac{1}{3}Op=$
(sup.$AB+$sup.$BC+$sup.$Cq)\times\frac{1}{3}Op=$sup.$ABCq\times\frac{1}{3}Op$.

Este es el volúmen del semicuerpo enjendrado por $ABCD$ &c., por lo que duplicando el factor sup.$ABCq$, se tendrá el volúmen enjendrado por todo el polígono, que será vol.$ABCDEF=2$sup.$ABCq\times\frac{1}{3}Op=$
sup.$ABCDEF\times\frac{1}{3}Op$, que es L. 2.° Q. D. D.

427 Si el polígono estuviese circunscrtio al círculo, *su volúmen seria igual á la superficie del cuerpo multiplicada por la tercera parte del radio de dicho círculo.*

428 Se llama *esfera* un cuerpo terminado por una superficie curva, cuyos puntos están todos á igual distancia de uno que se llama *centro.*

La esfera se puede concebir enjendrada por el movimiento de un semicírculo $DAEK$ (fig. 139) al jirar al rededor del diámetro DK; pues cada punto

de la superficie de este cuerpo se habrá orijinado de uno del semicírculo jenerador, que dista del centro una magnitud igual al radio de dicho semicírculo.

El diámetro DK al rededor del cual ha jirado el semicírculo jenerador, se llama *eje* de la esfera; los estremos D y K del eje, se llaman *polos*; y *radio* de la esfera es una línea que desde el centro va á terminar á su superficie.

429 El cuerpo DABC que se orijina de la revolucion del sector del círculo DCA, se llama *sector esférico*, el cual se compone de la parte DAFBM, que se llama *casquete esférico*, y del cono CAFBM: se llama *zona* una parte de la superficie de la esfera comprendida por dos planos paralelos, que se llaman *bases de la zona*.

430 Teor. *Toda seccion de la esfera por un plano es un círculo.*

Dem. Sea AFBM la seccion causada por un plano en la esfera: desde el centro C concíbase la perpendicular CO al plano AMB, y diferentes rectas CM, CM', &c. á diferentes puntos de la curva AMB en que termina la seccion, y se tendrá que las oblicuas CM, CM', CB, son iguales por radios de la esfera; y por lo mismo la curva AFBM tiene todos sus puntos equidistantes del O, luego es un círculo.

Cor. 1.º *Si la seccion pasa por el centro de la esfera, su radio será el de la esfera*; y por lo mismo *todos los círculos que resulten de planos que pasen por el centro serán iguales.*

Estos se llaman *círculos máximos*, y los que no pasan por el centro se llaman *círculos menores.*

Cor. 2.º *Dos círculos máximos se dividen siempre en dos partes iguales*; porque su comun interseccion es un diámetro.

Cor. 3.º *Todo círculo máximo divide á la esfera y á su superficie en dos partes iguales*, que se llaman *hemisferios*; porque si despues de haber separado dichas dos partes, se las aplica sobre la base comun,

las dos superficies coincidirán la una con la otra, por consiguiente serán iguales.

Cor. 4.° *Toda seccion que no pase por el centro será un círculo menor.*

Cor. 5.° *Los círculos menores van siendo mas pequeños á medida que se alejan del centro.*

Cor. 6.° *Por dos puntos de la superficie de la esfera se puede hacer pasar un arco de círculo máximo:* porque los dos puntos dados y el centro determinan la posicion de un plano.

Sin embargo, si los dos puntos fuesen los estremos de un diámetro, entónces estos dos puntos y el centro estarian en línea recta, y habria tantos círculos máximos como se quisiesen (365).

431 Teor. *Si en el semicírculo de que se orijina la esfera, se inscribe un semipolígono regular, se le circunscribe otro, y se concibe que jiren estos semipolígonos al mismo tiempo que el semicírculo, se tendrá un cuerpo inscrito y otro circunscrito; y la superficie de la esfera será mayor que la del cuerpo inscrito, y menor que la del circunscrito; y la diferencia entre la superficie del circunscrito y del inscrito podrá ser menor que cualquier cantidad dada.*

Espl. Sea *s.c.* la superficie del cuerpo descrito por el polígono inscrito ABCD &c (fig. 138), por r su radio Op, por D el diámetro AF de la esfera ó del círculo jenerador; sea *S.C.* la superficie del cuerpo descrito por el polígono circunscrito, cuyo lado es GL, su radio recto ó del círculo jenerador R, al eje GK le llamarémos H; y sea *S.E.* la superficie de la esfera descrita por el semicírculo ABCDEF; digo que se tendrá $S.E. > s.c.$, $S.E. < S.C.$, y $S.C.—s.c.$ podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

Dem. 1.° Por lo dicho (426, 1.°) se tiene

$$s.c. = \text{circunf.}r \times D \quad (\text{m}).$$

ahora, si aumenta el número de lados crecerá el factor circunf.r, pues que crecerá el radio r; el factor D permanecerá el mismo; luego deberá crecer (61, 3.°) tambien *s.c.* ó la superficie del cuerpo inscrito, á

medida que aumenta el número de lados del polígono jenerador; y como la superficie del cuerpo orijinado por el polígono de mas lados, tendrá mas circunferencias comunes con la superficie de la esfera; y ademas dicha superficie se hallará entre la del cuerpo orijinado por el polígono de ménos lados, y la de la esfera, resulta que $s.c.$ es una variable que al paso que crece se acerca á la superficie de la esfera, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella, ó $S.E. > s.c.$, que es L. 1.° Q. D. D.

2.° Igualmente se tendrá $S.C. = \text{circunf.}R \times H$ (n); pero aumentando el número de lados, disminuirá (344) el factor H, que se compone del diámetro D del círculo jenerador, y de las dos sajitas del polígono circunscrito; el factor circunf.R es constante, por ser R el radio del círculo jenerador; luego (61, 3°) disminuirá $S.C.$; y como al paso que mengua se acerca á la superficie de la esfera, por tener mas circunferencias comunes con ella, y estar dicha superficie entre la del cuerpo enjendrado por el polígono de ménos lados, y la de la esfera, se sigue (228) que $S.E. < S.C.$, que es L. 2.° Q. D. D.

3.° Restando la ecuacion (m) de la (n), resultarâ

$$S.C. - s.c. = \text{circunf.}R \times H - \text{circunf.}r \times D;$$

pero *circunf.r* se puede acercar todo lo que se quiera á *circunf.R*, pues (343) lo puede hacer r á R; y H se puede acercar (344) todo lo que se quiera á D; luego si la diferencia entre los factores *circunf.R*,H, y *circunf.r*, D, puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, la de sus productos, y de consiguiente la diferencia $S.C. - s.c.$ tambien lo podrá llegar á ser L. 3.° Q. D. D.

Cor. Luego *con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir á la esfera un cuerpo tal, que la diferencia entre cualquiera de sus superficies y la de la esfera sea menor que cualquier cantidad dada.*

432 Teor. *La superficie de la esfera es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por el diámetro.*

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá respecto del cuerpo circunscrito

$S.C.=\text{circunf.}R\times H$;

pero al paso que aumenta el número de lados del polígono, disminuye $S.C.$ y se va acercando á $S.E.$ de modo que su diferencia (431 cor.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo el producto $circunf.R\times H$ se acerca á $circunf.R\times D$, pues H se acerca (344) á D y $circunf.R$ es comun, resulta que las dos cantidades variables $S.C.$ y $circunf.R\times H$, siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes $S.E.$ y $circunf.R\times D$; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene $S.E.=circunf.R\times D$, que es L. Q. D. D.

Cor. Si en vez de $circunf.R$ se sustituye su valor (347), será

$$S.E.=2\pi R\times D=\pi\times 2R\times D=\pi\times D\times D=\pi D^2;$$

que es la fórmula general que da todas las que tienen relacion con la superficie de la esfera.

433 Como la superficie de un círculo máximo de la esfera será πR^2, y $D^2=(2R)^2=4R^2$, se sigue que *la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.*

434 Teor. *A toda esfera se pueden inscribir y circunscribir dos cuerpos, tales, que la diferencia entre sus volúmenes sea menor que cualquier cantidad dada.*

Espl. Sean ahora $V.C.$, $v.c.$ los volúmenes de dos cuerpos circunscrito é inscrito á la esfera; $S.C.$, $s.c.$, sus superficies; R, r, los radios rectos de los polígonos jeneradores; y digo que la diferencia $V.C.-v.c.$ puede ser menor que cualquier cantidad dada.

Dem. Por lo dicho (426) se tiene

$V.C.=S.C.\times\frac{1}{3}R$, $v.c.=s.c.\times\frac{1}{3}r$;

y restando será $V.C.-v.c.=S.C.\times\frac{1}{3}R-s.c.\times\frac{1}{3}r$;

y como la diferencia entre los factores puede ser (431 y 344) respectivamente menor que cualquier cantidad dada, resulta que lo mismo sucederá á los productos, y de consiguiente á $V.C.-v.c.$ cuyo valor espresa. L. Q. D. D.

Cor. *Luego con mas razon se podrá circunscribir, ó inscribir en la esfera un cuerpo tal, que la diferencia entre su volúmen y el de la esfera sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

435 Teor. *El volúmen de la esfera* V.E. *es igual á su superficie* S.E. *multiplicada por el tercio del radio* R, *ó* $V.E.=S.E.\times\frac{1}{3}R$.

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá $V.C.=S.C.\times\frac{1}{3}R$; pero al paso que crece el número de lados del polígono jenerador, va acercándose $V.C.$ á $V.E.$, de modo que su diferencia puede ser menor que cualquier cantidad dada (434 cor.); y como al mismo tiempo la espresion de $V.C.$, esto es, $S.C.\times\frac{1}{3}R$, se va acercando á $S.E.\times\frac{1}{3}R$ todo lo que se quiera (229 cor. 3.°) por hacerlo $S.C.$ á $S.E.$, y ser comun $\frac{1}{3}R$, resulta que las dos cantidades variables $V.C.$ y $S.C.\times\frac{1}{3}R$, siendo siempre iguales, se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes $V.E.$ y $S.E.\times\frac{1}{3}R$; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene

$V.E.=S.E.\times\frac{1}{3}R$, que es L. Q. D. D.

Cor. Sustituyendo en vez de $S.E.$ su valor (432 cor.) será $V.E.=\pi D^2\times\frac{1}{3}R=\pi D^2\times\frac{1}{6}D=\frac{1}{6}\pi D^3=$

$\frac{1}{6}\times 3,14159\&c.\times D^3=0,523595\times D^3$,

que es la fórmula de donde se sacan todas las que tienen relacion con el volúmen de la esfera.

Esc. 1.° Sustituyendo $2R$ en vez de D, el volúmen de la esfera será, $V.E.=\pi(2R)^2\times\frac{1}{3}R=4\pi\times\frac{1}{3}R^3$, y el del hemisferio EKG, que llamarémos H, será $H=2\pi\times\frac{1}{3}R^3$. Ahora, si concebimos el cilindro ELPG circunscrito á la esfera, y cuya altura sea el radio de la misma esfera, su volúmen llamándole G será (§ 414 cor.) $G=\pi R^3$.

Restando de esta ecuacion la anterior, el residuo representará la porcion de cilindro circunscrito ELTPGKZSQ, cuyo volúmen tendrá por espresion $G-H=\pi R^3-2\pi\times\frac{1}{3}R^3=(1-\frac{2}{3})\pi R^3=\pi\times\frac{1}{3}R^3$.

Esc. 2.° Ahora podríamos comparar las espresiones de las superficies y volúmenes de todos los

cuerpos què hemos dado á conocer, y determinar la razon en que estaban; pero solo ló harémos con los que se llaman *semejantes*, que son aquellos que están terminados por un mismo número de caras semejantes; y cuyos ángulos sólidos homólogos son iguales en número y en cantidad. Sean V, v, los volúmenes de dos cuerpos semejantes; A, B, C, las tres dimensiones que constituyen al primero, a, b, c, las del segundo; y tendrémos $V=$ABC, $v=abc$, y formando proporcion será $V:v::$ABC$:abc$; y como por ser semejantes, todas sus dimensiones han de ser proporcionales, sustituyendo (189) en vez de B, C y b, c, sus proporcionales A, a, se tendrá $V:v::A^3:a^3$; que manifiesta que *los volúmenes de dos cuerpos semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

436 Se llama *Trigonometría* la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos. Cuando el triángulo que se ha de resolver es rectilíneo, la Trigonometría se llama *plana*, ó *rectilínea*; y cuando está formado sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos se llama *Trigonometría esférica.*

En todo triángulo hay seis cosas que considerar, á saber, tres lados, y tres ángulos; tres de estos datos determinan un triángulo con tal de que en los rectilíneos entre un lado), y por lo mismo el objeto de la Trigonometría es resolver este problema general:

Dadas tres de las seis cosas de que consta un triángulo, hallar las otras tres; estos datos bien combinados, ofrecen los seis casos siguientes para la resolucion de los triángulos.

I. *Dados los tres lados, hallar los tres ángulos.*

II. *Dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

III. *Dado un lado y los ángulos adyacentes, hallar el otro ángulo y los dos lados.*

IV. *Dados dos ángulos y un lado opuesto á uno de ellos, hallar los otros dos lados y el tercer ángulo.*

V. *Dados dos lados, y el ángulo opuesto á uno de ellos, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

VI. *Dados los tres ángulos, hallar los tres lados.*

437 Los tres primeros son los de la igualdad de los triángulos; y como el cuarto es lo mismo que el tercero, porque dados dos ángulos se conoce el otro (289 cor. 1.°), resulta que en los cuatro primeros casos siempre se puede resolver el triángulo.

438 En el quinto se pueden dar dos soluciones cuando el ángulo conocido es el opuesto al lado menor, porque los datos pueden corresponder á dos triángulos, como manifiesta la (fig. 140) en que los dos triángulos ABC, BDC tienen los mismos datos, á saber, comun el ángulo en C, y el lado AB=BD.

439 El sesto caso es de todo punto indeterminado en los triángulos rectilíneos; porque los datos pueden corresponder á cuantos triángulos se quieran; pues tirando las *bc*, *b'c'*, paralelas á BC (fig. 141), los triángulos ABC, A*bc*, A*b'c'*, y otros muchísimos que se podrian formar, todos son equiángulos, y por consiguiente tienen los mismos datos. Pero como en este caso los triángulos son semejantes (331) y tienen sus lados proporcionales, la Trigonometría manifiesta de un modo general la relacion que tiene entre sí.

440 Para fijar esta relacion, y que quede determinada cuando se conoce uno de los lados, se ha inventado un conjunto ó *sistema* de líneas, que se llaman *líneas trigonométricas*; las cuales están dotadas de dos propiedades importantes: 1.ª *que con su magnitud y signo determinan la magnitud absoluta de un arco, y de consiguiente la del ángulo de que es medida*; y 2.ª *que dichas líneas son proporcionales con los lados de los triángulos.*

441 Para darlas á conocer, consideremos un arco

cualquiera AB (fig. 142), que teniendo su principio ú orijen en A, vaya á terminar en cualquier punto B de la circunferencia; y lo que se diga de este arco se deberá entender del ángulo ACB de que es medida. Esto supuesto, se llama *seno recto ó seno* de un arco, la perpendicular tirada desde uno de sus estremos al radio ó diámetro que pasa por el otro estremo; así, BD es el seno del arco AB. La parte AD del radio ó diámetro interceptada entre el principio A del arco y el pie D del seno, se llama *senoverso* del mismo arco AB Si en el principio A del arco se tira la tangente indefinida A*e*, y se prolonga el radio CB hasta encontrarla en E, la parte AE se llama *tangente trigonométrica* ó *tangente* del arco AB; y el radio CB prolongado hasta encontrar á la tangente, esto es, la CE, se llama *secante* del mismo arco; de manera que la tangente y secante se determinan mútuamente la una á la otra. Así, se dice que la tangente de un arco es *la parte de la tangente tirada en uno de sus estremos, hasta encontrar al radio que pasa por el otro estremo*; y secante es *el radio prolongado que pasa por un estremo, hasta encontrar á la tangente tirada en el otro estremo.* Donde se ve que todo arco tiene cuatro líneas: un *seno*, un *senoverso*, una *tangente* y una *secante.*

442 Si consideramos ahora el arco BF, la BH será su *seno*, FH su *senoverso*, FG su *tangente*, y CG su *secante*; y suponiendo que ABF sea un cuadrante, BF será complemento de AB, y las líneas BH, FH, FG, CG, serán las líneas del complemento de AB. En muchas ocasiones se hace uso de estas, refiriéndolas todas al arco primitivo; por lo cual á cada arco corresponden ocho líneas trigonométricas: cuatro, propiamente suyas, y cuatro de su complemento, á saber: *seno*, *senoverso*, *tangente*, y *secante*, y las del complemento que se espresan *coseno*, *cosenoverso*, *cotangente*, y *cosecante*. Para introducir estas líneas en los cálculos, solo se escriben las letras indispensables para que no se confun-

dan unas con otras; así, solo se pone *sen.*, *sen.ver.*, *tang.*, *sec.*, *cos.*, *cos ver.*, *cot.*, y *cosec.*

Cor. 1.° Como BH=CD, por lados opuestos del rectángulo DCHB, se sigue que CD tambien será el coseno de AB, y por lo mismo en tirando el seno de un arco, *la parte interceptada entre su pie y el centro es el coseno de dicho arco.*

Cor. 2.° Luego si espresamos en términos trigonométricos la proporcion (333, 1.ª), dirá que *el senoverso de un arco ó de un ángulo es á su seno, como el mismo seno es á la suma del radio y del coseno del mismo ángulo.*

443 Teor. *El seno de un arco es la mitad de la cuerda de un arco duplo.*

Dem. Porque si prolongamos el seno BD hasta que vuelva á encontrar á la circunferencia por abajo en el punto S, tendrémos que por ser CA perpendicular á BS, la dividirá (293) en dos partes iguales en D, y tambien (294) al arco BAS; por consiguiente sen.AB=BD=$\frac{1}{2}$BS=$\frac{1}{2}$cuerda BAS=$\frac{1}{2}$cuerda 2AB, que era L. Q. D. D.

Cor. Como (290) la mayor cuerda de un círculo es el diámetro, resulta que su mitad, que es el seno de un cuadrante, ó *el radio es el mayor seno que se puede considerar.*

444 Teor. *Conocido el radio de un círculo se conoce el valor absoluto de tres líneas trigonométricas, á saber: el seno de un cuadrante, que es el mismo radio; la tangente de 45°, que tambien es igual al radio; y el seno de 30° que es igual á la mitad del radio.*

Dem. 1.° Está fundado en lo que se acaba de demostrar (443 cor.).

2.° Si se supone el arco AB ó el ángulo ACB de 45°, el AEC valdrá tambien 45°; luego el triángulo EAC es isósceles, y da AE=AC, ó tang.45°=R.

3.° Si el arco AB fuese de 30°, su duplo BAS valdria 60°, y la cuerda BS sería lado de exágono regular que es (317 cor. 8.°) igual al radio R; luego su mitad BD ó sen.30°=$\frac{1}{2}R$, que es L. Q. D. D.

445 Teor. *Dado el seno de un arco y el radio, se pueden determinar en valores suyos todas las demas líneas trigonométricas.*

Dem. El triángulo BDC rectángulo en D, dará (332 cor.) $BD^2+DC^2=BC^2$ (a), ó $DC=\sqrt{BC^2-BD^2}$ (b); y sustituyendo sus valores será $\cos.=\sqrt{R^2-\text{sen.}^2}$ (c).

Haciendo $R=1$, las ecuaciones de arriba se convierten en

$$\text{sen.}^2+\cos.^2=1 \text{ (d)}, \cos.=\sqrt{1-\text{sen.}^2} \text{ (e)}.$$

Ahora, por ser AE tambien perpendicular á AC, las BD, y AE serán paralelas, y los triángulos semejantes AEC, BDC darán

DC:AC::BD:AE::BC:EC; ó cos.:1::sen.:tang.::1:sec.

Donde despejando la tangente y la secante, refiriéndonos á la primera razon, se tendrá

$$\text{tang.}=\frac{\text{sen.}}{\cos.}=\text{(e)}\ \frac{\text{sen.}}{\sqrt{1-\text{sen.}^2}} \text{ (f)},$$

$$\text{sec.}=\frac{1\times1}{\cos.}=\frac{1}{\cos.}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen.}^2}} \text{ (g)}.$$

Los triángulos BDC, GFC tambien son semejantes, por ser ambos rectángulos, el uno en D y el otro en F, y tener ademas el ángulo DBC=GCF por alternos internos entre las paralelas BD, FC, siendo GC la secante; luego darán

BD:CF::DC:FG::BC:CG, ó sen.:1::cos.:cot.::1:cosec.

De donde sale $\cot.=\frac{\cos.}{\text{sen.}}=\text{(e)}\ \frac{\sqrt{1-\text{sen.}^2}}{\text{sen.}}$ (h),

y $\text{cosec.}=\frac{1\times1}{\text{sen.}}=\frac{1}{\text{sen.}}$ (i).

Las ecuaciones (e), (f), (g), (h), (i), manifiestan que todas las líneas trigonométricas dependen del seno y del radio. L. Q. D. D.

Esc. Es muy conveniente encomendar á la memoria las fórmulas

$$\text{tang.}=\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}},\ \text{sec.}=\frac{1}{\text{cos.}},\ \text{cot.}=\frac{\text{cos.}}{\text{sen.}},\ \text{y cosec.}=\frac{1}{\text{sen.}},$$

por las muchísimas transformaciones de que son susceptibles, y que cada una da un valor particular para la línea que se despeja. Ademas debe observarse que el triángulo rectángulo CAE da $AC^2=EC^2-AE^2$, ó $1=\text{sec.}^2-\text{tang.}^2$, que tambien da $\text{sec.}^2=1+\text{tang.}^2$;

y como de la (ec. g) se saca $\text{cos.}=\frac{1}{\text{sec.}}$ será

$$\text{cos.}^2=\frac{1}{\text{sec.}^2}=\frac{1}{1+\text{tang.}^2}.$$

446 Entendido esto, para determinar las alteraciones que corresponden á las líneas de un arco, por las que puedan sobrevenir al mismo arco, y manifestar la jeneralidad de las fórmulas halladas, y su conformidad con sus definiciones y construcciones geométricas, prescindirémos del senoverso y cosenoverso, y principiarémos fijando las ideas del modo siguiente.

Sea A el principio ú oríjen de todos los arcos que vamos á considerar; y todos los arcos que se cuenten desde A hácia B, F, &c. serán positivos, y todos los que se cuenten desde A hácia S, Y, &c serán negativos. Sea LA*e* una tangente indefinida, donde se han de contar todas las tangentes, llamando positivas las que se cuenten desde A para arriba, y negativas las contrarias; sea GFU una cotangente indefinida, donde se han de contar todas las cotangentes, llamando positivas las que se cuenten á la izquierda del punto F, y negativas las que se cuenten á la derecha; sea AP el diámetro sobre que se han de tirar perpendiculares todos los senos, llamando positivos los que estén por la parte de arriba, y negativos los que estén por la parte de abajo; sea este mismo diámetro donde se han de contar los cosenos, llamando positivos los que estén á la izquierda, y negativos los que estén á la derecha del

centro C; y como las secantes y cosecantes varían de direccion á cada arco, sin que haya línea ni punto fijo en que se puedan contar, solo las llamarémos negativas cuando no cumplan exactamente con su definicion, ó lo que es lo mismo, cuando no sea el radio que pasa por el otro estremo del arco el que encuentra á la tangente, sino el radio que está en direccion opuesta.

Sentado esto, si el arco AB crece y se convierte en AB*b*, su seno *bd* será mayor que BD; porque á mayor arco *b*A*t* corresponderá mayor cuerda que á BAS, esto es, $bt > BS$; luego $\frac{1}{2}bt > \frac{1}{2}BS$, ó sen.AB*b* > sen.AB.

El coseno C*d* será menor que el CD del primero, porque es parte respecto de él. La tangente A*e* será mayor que la AE del primero; porque como la ha de determinar la secante C*b*, y esta pasa por fuera de la CE, la irá á encontrar mas arriba (ó por fuera) del punto E. La secante C*e* ha de ser mayor que la CE, por separarse mas de la perpendicular CA. La cotangente Fg debe ser menor que FG, porque debiéndola terminar el radio C*b* prolongado, y estando este entre CG y CF deberá encontrar á la FG ántes del punto G. La cosecante Cg debe ser menor que la CG, porque se separa ménos de la perpendicular CF. Luego *cuando crece un arco sin llegar al cuadrante, crecen sus líneas y menguan sus colíneas.*

Esto mismo lo confirman las fórmulas (445) que espresan sus valores.

447 Si el arco AB*b* continúa creciendo, y se convierte en el cuadrante ABF, entónces de las seis líneas trigonométricas, *dos son iguales con cero*, á saber, *el coseno y la cotangente*; *dos con el radio*, á saber, *el seno y la cosecante*; y *dos infinitas*, á saber, *la tangente y la secante.*

En efecto, el coseno se reduce á cero, porque habiéndose confundido el estremo del arco con el radio CF no hay distancia ninguna entre el pie del se-

no y el centro. La cotangente lo hace igualmente, porque ha de ser la parte de la tangente geométrica levantada en el punto F, y comprendida entre dicho punto y el paraje en que la encuentre el radio que pasa por F; luego para encontrar á dicho radio no necesita salir ni separarse del punto F, y por lo mismo se reducirá á cero dicha cotangente.

Siendo el seno entónces la mitad de la cuerda de 180° ó π, que es el diámetro, se convierte en el radio. La cosecante es tambien igual al radio; porque la cosecante es el radio prolongado hasta que encuentre á la cotangente, que se ha reducido al punto F; luego no se debe prolongar nada dicho radio para encontrar á la cotangente.

Finalmente, la secante y tangente son infinitas; porque siendo ABF un cuadrante, la FC es perpendicular á AC; y siéndolo tambien la AE, resulta que estas dos líneas son paralelas, y no se pueden encontrar; luego serán infinitas.

Todo esto lo dan á conocer tambien las fórmulas halladas (445), como cualquiera puede comprobarlo.

448 Sea ahora el arco AFM; y se tendrá su seno MN *positivo*, su coseno NC *negativo*, su tangente AL *negativa*, y su secante CL *negativa*. Porque la tangente cae por la parte de abajo del punto A, y la secante en vez de ser el radio CM prolongado hácia Q, es al contrario prolongado desde C hácia L. Para deducir sus valores negativos como deben ser, considerarémos los triángulos semejantes CNM, CAL, que dan CN:CA::NM:AL::CM:CL,

ó $-\text{cos.}:1::\text{sen.}:\text{tang.}::1:\text{sec.}$,

de donde sale $\text{tang.} = -\dfrac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$, y $\text{sec.} = -\dfrac{1}{\text{cos.}}$.

La cotangente FV es *negativa*, y la cosecante CV es *positiva*; la cotangente es negativa, porque va desde F hácia la derecha; y la cosecante es positiva, porque siendo la secante del complemento, es exactamente el radio prolongado que pasa por el estre-

mo del arco hasta encontrar á la cotangente.

Comparando los lados de los triángulos semejantes CMN, CFV, se obtienen estos mismos resultados.

449 Supongamos que continúa el arco creciendo; y se convierte en AFP; y se tendrá su seno $=0$, su cos. $=-1$, su tang. $=-0$, su sec. $=-1$; su cotangente FV y su cosecante CP prolongada llegan á ser paralelas, y por consiguiente son infinitas.

450 Sea ahora el arco AFPZ, y se tendrá su seno ZN *negativo*; su coseno CN *negativo*; su tangente AE *positiva*; su secante CE *negativa* (porque en vez de ser el radio CZ prolongado hácia X, es el mismo radio prolongado hácia la parte opuesta); su cotangente FG es *positiva*; y su cosecante CG (que son las líneas del complemento FPZ del arco que considerámos) es *negativa*; la primera por ir desde F hácia la izquierda; y la segunda, porque en vez de ser el radio CZ prolongado hácia X, lo está al contrario.

Sus valores se deducen de los triángulos semejantes CNZ, CAE, y de los CNZ, CGF.

451 Supongamos ahora que el arco llega á ser los tres cuadrantes, esto es, AFPY; y tendrémos su seno CY *negativo* ó $=-1$: su coseno que se reduce al punto C, será $=-0$; su tangente AE llega á ser $=\infty$; y su secante CE$=-\infty$ (porque vienen á ser paralelas); su cotangente se reduce al punto F, y por consiguiente es $=0$; y su cosecante se reduce al radio CF *negativo* ó $=-1$.

452 Sea ahora el arco AFPYS el que vamos á considerar, y tendrémos su seno SD *negativo*; su coseno CD *positivo*; su tangente AL *negativa*; su secante CL *positiva*; su cotangente FV *negativa*; y su cosecante CV igualmente *negativa*.

Para deducir sus valores se consideran los triángulos semejantes CDS, CAL, y los CDS, CFV.

453 Supongamos ahora que el arco llega á ser toda la circunferencia; y se tendrá su seno $=-0$;

su coseno $=1$; su tangente $=-0$; su secante $=1$; su cot.$=-\infty$; su cosec:$=-\infty$.

454 Si el arco continuase creciendo, se tendrían los mismos valores que ántes, con solo añadir una, dos ó mas circunferencias á cada arco de los que acabamos de considerar.

455 Supongamos ahora que el arco AB, en vez de ir creciendo, va menguando (con lo cual menguarán sus líneas y crecerán sus colíneas) hasta llegar á cero, y tendrémos: su seno $=0$; su coseno $=1$; su tangente $=0$; su secante $=1$; su cotangente $=\infty$; y su cosec.$=\infty$. Donde es digno de notarse que todas las líneas de un arco *cero* son las mismas que las de la circunferencia entera, pero se diferencian en posicion, escepto el coseno y la secante.

456 Supongamos ahora que el arco continúa menguando todavía, ó por mejor decir, que crece en un sentido opuesto al de ántes, y se llega á convertir en AS, y tendrémos su seno SD *negativo*; su coseno CD *positivo*; su tangente AL *negativa*; su secante CL *positiva*; su cotangente FV *negativa*; y su cosecante CV tambien *negativa*.

La cotangente del arco negativo AS será la tangente del complemento de dicho arco; pero el complemento de un arco negativo debe ser este mismo arco mas un cuadrante; luego el complemento de que tratamos es todo el arco SAF; y como la tangente de este arco es la FV negativa, y su secante es la CV tambien negativa, resulta que la tangente y cosecante del arco negativo son negativas.

Luego cuando un arco pasa de positivo á negativo, solo varían de signo el seno, tangente, cotangente y cosecante; y permanecen las mismas la secante y el coseno.

457 Todo lo espuesto manifiesta la perfecta conformidad de las fórmulas de las líneas trigonométricas con su misma definicion y construccion geométrica; y se deduce que como todas las líneas vienen espresadas en el seno y el coseno, en sabiendo los

valores absolutos y signos de estos, se hará la sustitucion conveniente, y se tendrán los valores y signos de todas las demas líneas trigonométricas.

458 Para hacer esta sustitucion con facilidad, conviene tener bien presente que en el primer cuadrante que se considere se tienen *senos y cosenos positivos*; y en el 2.° *senos positivos y cosenos negativos*; en el 3.° *senos y cosenos negativos*; y en el 4.° *senos negativos y cosenos positivos*.

459 Consideremos ahora dos arcos AFM, PM, que el uno tenga su orijen en A, y el otro en P, y que sean el uno suplemento del otro, ó entre los dos valgan la semicircunferencia, y tendrémos que el seno MN conviene en un todo á ambos arcos. El coseno MT ó CN es tambien el mismo en magnitud para los dos arcos AFM, MP; pero se diferencian en posicion, pues respecto del AFM se cuenta desde el pie N del seno hácia el principio A del arco, y en el MP se cuenta desde el pie del seno hácia la parte opuesta del principio P del arco MP. La cotangente FV conviene en magnitud á los dos arcos AFM, MP; pero se diferencian en posicion, por razones análogas á las anteriores. Los triángulos CAL, CPQ, por tener CA=CP, los ángulos en C iguales por opuestos al vértice, y los en A y en P por rectos, son iguales (261), y dan AL=PQ, CL=CQ; lo que manifiesta que la tangente y secante del arco AFM son iguales en magnitud á las del arco PM; pero ambas se diferencian en posicion, porque la tangente AL del primero se cuenta en un sentido opuesto á aquel en que se ha contado el arco; y la PQ del segundo se cuenta en el mismo sentido que su arco. La secante CL del arco AFM, en vez de ser el radio prolongado que pasa por el estremo M del arco, es la prolongacion de este radio en un sentido opuesto; la secante CQ del arco PM es positiva; porque cumple exactamente con su definicion. Esto mismo sucede á la cosecante CV, y de consiguiente conviene en magnitud y posicion á am-

bos arcos. De donde resulta, que *las líneas de un arco son las mismas en magnitud que las de su suplemento; pero se diferencian en posicion, escepto el seno y la cosecante*, que convienen en un todo á ambos arcos.

Cor. gener. De toda la doctrina espuesta se deduce que si espresamos por $\frac{1}{2}\pi$ el cuadrante ABF, y por m el arco BF, será
sen.AB$=$sen.(ABF$-$BF)$=$sen.$(\frac{1}{2}\pi-m)=$BD$=$cos.m, y cos. AB$=$cos.$(\frac{1}{2}\pi-m)=$BH$=$sen.m.

Si se hace FM$=m$, será sen.AFM$=$sen.$(\frac{1}{2}\pi+m)=$ MN$=$cos.m, y cos. AFM$=$ cos.$(\frac{1}{2}\pi+m)=-$CN$=-$sen.m.

Y si hacemos PM$=m$, será sen.AFM$=$sen(AFP$-$PM)$=$sen$(\pi-m)=$MN$=$sen$m$; y cos.AFM$=$cos.$(\pi-m)=-$CN$=$cos.m.

460 Puesto que dado el radio R de un círculo, se conoce el seno de un cuadrante y la tangente de 45° que son iguales con él, y el seno de 30° que vale la mitad del radio, y conocido el seno de un arco se pueden conocer todas sus líneas trigonométricas, vamos á ver como por su medio se podrán calcular las de todos los arcos; para lo cual se tienen las tres proposiciones siguientes en el supuesto de ser el radio $R=1$, y de que para indicar el cuadrado de una línea trigonométrica de un arco A, por ejemplo de un seno, se escribe indiferentemente sen.^2A, ó sen.A^2 &c.

1.ª *Dado el seno de un arco* A, *el seno de la mitad viene espresado por sen.*$\frac{1}{2}$A$=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\textit{sen.}^2\text{A}}}$.

Dem. Sea (fig. 143) el arco AHB$=A$, y BD su seno; con lo cual tendrémos que si tiramos la cuerda AB, su mitad AE será el seno pedido; y como

$$\text{AE}=\tfrac{1}{2}\text{AB}=(\S.\ 333,\ \text{cor. } 1.^\circ)\tfrac{1}{2}\sqrt{2\text{AC}\times\text{AD}}=$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2\text{AC}(\text{AC}-\text{CD})}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\times1(1-\text{cos.AHB})}=$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\text{cos.AHB}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\text{cos.}A}=$$

(§ 445, c) $\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\text{sen.}^2 A}}$, que es L. Q. D. D.

2.ª *Dados los senos y por consiguiente* (445) *los cosenos de dos arcos* A, B, *los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos son:*

$$\begin{cases} \text{sen.}(A+B)=\text{sen.}A\cos.B+\text{sen.}B\cos.A & (m), \\ \cos.(A+B)=\cos.A\cos.B-\text{sen.}A\,\text{sen.}B & (n), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sen.}(A-B)=\text{sen.}A\cos.B-\text{sen.}B\cos.A. \\ \cos.(A-B)=\cos.A\cos.B+\text{sen.}A\,\text{sen.}B. \end{cases}$$

Dem. Sean (fig. 144) AB$=A$, y BD$=B$, los arcos dados; colocando el uno á continuacion del otro, será ABD$=$AB$+$BD$=A+B$, y poniendo el BD desde B hasta M, será AM$=$AB$-$BD$=A-B$; luego bajando las perpendiculares DF, MP al radio AC

$$\text{será} \left\{ \begin{array}{l} \text{DF}=\text{sen.ABD}=\text{sen.}(A+B), \\ \text{CF}=\text{cos.ABD}=\cos.(A+B), \\ \text{MP}=\text{sen.AM}=\text{sen.}(A-B), \\ \text{CP}=\text{cos.AM}=\cos.(A-B), \end{array} \right\} (P)$$

Para determinar estas líneas en valores de las de los arcos dados, tirarémos la cuerda MD, y el radio CB que (294 esc.) le será perpendicular, y tambien tirarémos la BE perpendicular á la AC, y tendrémos que las líneas de los arcos dados

$$\text{serán} \begin{cases} \text{BE}=\text{sen.}A, & \text{CE}=\cos.A, \\ \text{DH}=\text{sen.}B, & \text{CH}=\cos.B, \end{cases}$$

Si ahora tiramos la HK paralela á BE, y las HL, MN, paralelas á la AC, y observamos que los triángulos MNH, HLD (por tener MH$=$HD por lo dicho ántes, el ángulo HMN$=$DHL por correspondientes entre las paralelas MN, HL siendo MD la secante, y el ángulo MHN$=$HDL, por la misma razon entre las paralelas HK, DF, siendo tambien la secante MD) son iguales, y dan MN$=$HL, y NH$=$LD; las líneas DF, CF, MP, CP que tratamos de conocer; las podrémos espresar del modo siguiente:

$$\begin{cases} DF=DL+LF=DL+HK, \\ CF=CK-FK=CK-HL, \\ MP=NK=HK-NH=HK-DL, \\ CP=CK+KP=CK+MN=CK+HL. \end{cases}$$

Puesto que los triángulos CBE, CHK son semejantes,

darán $\begin{cases} CB:CH::BE:HK::CE:CK, \\ \text{ó } 1:\cos.B::\text{sen.}A:HK::\cos.A:CK, \end{cases}$

que despejando el cuarto y sesto término, refiriéndonos á la primera razon, se tendrá $HK=\text{sen.}A\cos.B$, $CK=\cos.A\cos.B$.

Los triángulos CBE, DHL, por tener sus lados perpendiculares, serán (331 cor. 4.°) semejantes y

darán $\begin{cases} CB:DH::BE:HL::CE:DL, \\ \text{ó } 1:\text{sen.}B::\text{sen.}A:HL::\cos.A:DL, \end{cases}$

de donde resultará,

$$HL=\text{sen.}A\text{sen.}B,\ DL=\text{sen.}B\cos.A.$$

Luego sustituyendo estos valores en las ecuaciones (P), y poniendo los primeros miembros por segundos, nos resultará

$$\begin{cases} \text{sen.}(A+B)=\text{sen.}A\cos.B+\text{sen.}B\cos.A. \\ \cos.(A+B)=\cos.A\cos B-\text{sen.}A\text{sen.}B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sen.}(A-B)=\text{sen.}A\cos.B-\text{sen.}B\cos.A. \\ \cos.(A-B)=\cos.A\cos.B+\text{sen.}A\text{sen.}B. \end{cases}$$

que es L. Q. D. D.

3.ª *Dado el seno, y por consiguiente el coseno de un arco* A *el seno y coseno del arco duplo son:*

$$\text{sen.}2A=2\text{sen.}A\cos.A=2\text{sen.}A\sqrt{1-\text{sen.}^2A}\ (p),$$
$$\cos.2A=\cos.^2A-\text{sen.}^2A=1-2\text{sen.}^2A\ (q).$$

Dem. No hay mas que en las fórmulas anteriores hacer $B=A$, y sustituir despues en vez de $\cos.A$ su igual $\sqrt{1-\text{sen}^2A}$, y $1-\text{sen.}^2A$ en vez de $\cos.^2A$.

Cor. Si hacemos $2A=A'$, será $A=\frac{1}{2}A'$; y si sustituimos en las fórmulas anteriores, se tendrá

$$\text{sen.}A'=2\text{sen.}\tfrac{1}{2}A'\cos.\tfrac{1}{2}A';$$
$$\cos.A'=\cos.^2\tfrac{1}{2}A'-\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}A';$$

y como $\cos.^2\frac{1}{2}A' = 1 - \text{sen.}^2\frac{1}{2}A'$, será

$\cos.A' = 1 - \text{sen.}^2\frac{1}{2}A' - \text{sen}^2\frac{1}{2}A' = 1 - 2\text{sen.}^2\frac{1}{2}A'$.

461 Si en la fórmula (m) se hace $B = 2A$, se convertirá en $\text{sen.}3A = \text{sen.}A\cos.2A + \text{sen.}2A\cos.A$; y poniendo en vez de $\cos.2A$, $\text{sen.}2A$, y $\cos.A$, sus valores (q), (p) y (e) (445) todo espresado en valores del seno, se tendrá $\text{sen.}3A = \text{sen.}A(1 - 2\text{sen.}A^2) +$

$$2\text{sen.}A\sqrt{1 - \text{sen.}^2A} \times \sqrt{1 - \text{sen.}^2A} =$$

$$\text{sen.}A - 2\text{sen.}^3A + 2\text{sen.}A(1 - \text{sen}^2A) =$$

$$\text{sen.}A - 2\text{sen.}^3A + 2\text{sen.}A - 2\text{sen.}^3A = 3\text{sen}A - 4\text{sen}^3A,$$

que es la fórmula que espresa el seno del arco triplo en valores del arco sencillo. Igualmente se puede hallar el coseno del mismo arco; y por procedimientos análogos se pueden determinar todas las líneas trigonométricas de cualquier arco múltiplo de otro dado.

462 Ademas de la propiedad de determinar la magnitud del arco, se verifica tambien que *todas las líneas trigonométricas son proporcionales con los radios de los círculos con que están trazados los arcos.*

Dem. En efecto, si suponemos que haciendo centro en C (fig. 145) vertice del ángulo DCG, se trazan con los radios CA, CD, dos arcos de círculo AB, DG, y bajamos desde A y D, las AP, DE perpendiculares á CG, resultará que serán los senos respectivos de los arcos AB, DG, que tendrán un mismo número de grados por ser ambos medida del ángulo DCG; las líneas CP, CE, serán sus cosenos; y levantando en B y G las perpendiculares BN, GM á la CG, serán las tangentes, y CN, CM las secantes. Ahora los triángulos semejantes CDE, CAP, dan CD:CA::DE:AP::CE:CP, ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, y acentuando las líneas correspondientes al radio CA, que tambien señalarémos con la R' acentuada, será

$R:R'::\text{sen.}:\text{sen.}'::\cos'.:\cos.$ (a); los triángulos semejantes CGM, CBN, tambien darán

CG:CB::GM:BN::CM:CN,

ó $R:R'$::tang.:tang.'::sec.:sec.' (b).

Ahora, completando los cuadrantes GDR, BAQ se tendrá que RS, QO, serán las cotangentes de los arcos GD, BA; y CS, CO serán las cosecantes; y los triángulos semejantes CSR, COQ darán

CR:CQ::RS:OQ::CS:CO,

ó $R:R'$::cot.:cot.'::cosec.:cosec.' (c).

Y como las tres séries de razones iguales (a), (b), (c), tienen comun la razon $R:R'$, enlazando las demas porque son iguales, se tendrá

$R:R'$::sen.:sen.'::cos.:cos.'::tang:tang'::sec.:sec.'::cot.: cot'::cosec.:cosec'.

Cor. Luego *si respecto de un radio cualquiera se calculan estas líneas para todos los arcos, y al lado de cada arco se pone el valor de las líneas trigonométricas que le corresponden, las tablas que las contengan servirán para hallar estas mismas líneas cuando correspondan á otro radio*; y ademas, por medio de ellas *cuando se dé un arco, se podrá determinar la magnitud de sus líneas trigonométricas; y dada una línea trigonométrica, se podrá hallar el valor del arco á que corresponda.*

463 Las tablas que se formasen de este modo, esto es, que contuviesen el valor de las líneas trigonométricas en partes del radio, se llaman *tablas trigonométricas naturales*; pero como todos los cálculos se hacen por medio de proporciones, para hacer las operaciones con facilidad y prontitud, se ha tomado el medio de que las tablas contengan, no las líneas trigonométricas naturales, sino el logaritmo correspondiente á dicho número de partes del radio â que equivalgan; y en este caso que es como las usamos se llaman *tablas trigonométricas artificiales*. Las de D. Tadeo Lópe y Aguilar, que como ya hemos dicho en otra ocasion, son â las que nosotros nos referimos, están calculadas de 10 en 10 segundos; cuya construccion y uso omitimos por razones análogas á las espuestas (208), y pasarémos á la

Resolucion de los triángulos rectángulos.

464 Para la resolucion de los triángulos rectángulos solo se necesitan dos proporciones generales, que se llaman *analogías.*

1.ª *El radio de las tablas es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo agudo; ó el radio de las tablas es al coseno de un ángulo agudo, como la hipotenusa es al cateto adyacente á dicho ángulo agudo;* que puestas en proporciones dan

$$\begin{cases} R\text{:sen.áng.ag.::hipot.:catet.op.,} \\ R\text{:cos.áng.ag.::hip.:cat.ady.} \end{cases}$$

Dem. En efecto, sea CDE un triángulo rectángulo cualquiera; si con una parte CA, igual al radio de las tablas, se traza el arco AB, y se tira la perpendicular AP, esta será el seno que se halle en las tablas, y CP el coseno; y los triángulos CAP, CDE, serán semejantes (328) y darán

$$\begin{cases} \text{CA:AP::CD:DE, ó } R\text{:sen.áng.ag.::hip.:cat.op.,} \\ \text{CA:CP::CD:CE, ó } R\text{:cos.áng.ag.::hip.:cat.ady.,} \end{cases}$$

que es L. Q. D. D.

Esc. Como el radio de las tablas se considera igual con la unidad, resulta que hallando el cuarto término en las dos proporciones de arriba,

$$\text{será} \begin{cases} \text{DE}=\text{CD}\times\text{AP}=\text{hip.}\times\text{sen.áng.op. á DE,} \\ \text{CE}=\text{CD}\times\text{CP}=\text{hip.}\times\text{cos.áng.ady. á CE,} \end{cases}$$

cuyas espresiones manifiestan que *un cateto de un triángulo rectángulo es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo adyacente, tomados en las tablas.*

465 2.ª *El radio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo es al cateto opuesto,*
ó R:tang.áng.ag.::cat.ady.:cat.op.

Dem. Porque si despues de haber descrito el arco AB con el radio CA, igual al de las tablas, se tira la perpendicular BN, esta será la tangente trigonométrica del ángulo en C; y los triángulos semejantes CBN, CDE, darân CB:BN::CE:DE, ó *R*:tang.áng.ag.::cat.ady.:cat.op. (A), L. Q. D. D.

Cor. De donde tomando el radio por unidad, resulta DE=CE×BN, ó cat.=tang.áng.op.×cat.; que quiere decir, que *en un triángulo rectángulo cualquiera un cateto es igual á la tangente trigonométrica de su ángulo opuesto multiplicada por el otro cateto.*

Esc. Se usará la primera analogía cuando la hipotenusa entre en los datos, ó sea lo que se busque, y de la segunda cuando no.

466 Esto supuesto, para resolver el triángulo ABC (fig. 146) rectángulo en C, en que se da la hipotenusa AB=327 varas, y el ángulo *A*=32°25′15″,7; se escriben los datos dentro de una llave como se ve en (M) y las partes que se buscan dentro de otra (N); se restará el ángulo *A* de 90° y se hallará el *B* de 57°34′44″,3.

(M)	(N)
Áng.C=90°.	Áng.*B*=57°34′44″,3.
AB=327 varas.	BC=175,317 varas.
Áng.*A*=32°25′15″,7.	AC=276,031 varas.

Para hallar los lados BC, AC, nos servirá la primera analogía alternada que será

R:327::sen.32°25′15″,7:BC::cos.32°25′15″,7:AC.

Que hallando por logaritmos el cuarto y sesto término refiriéndonos á la primera razon, será

$$\text{log. BC}=\begin{cases}\text{log.sen.}32°25'\,10''= & 9{,}7292566\\ \text{part.corresp.á}5'',7= & 189\\ \text{log.}327\ldots\ldots\ldots\ldots= & 2{,}5145478\\ \text{comp.log.}R\ldots\ldots\ldots= & 0\end{cases}$$

suma ó log.175,317=*2,2438233

$$\log.AC = \begin{cases} \log.\cos.32^\circ 25'10'' = 9,9264176 \\ \text{part.corresp.á}\,5'',7 = \quad -76 \\ \log.327 \ldots\ldots = 2,5145478 \\ \text{comp.log.}R \ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

$$\text{suma ó log.}276,031 = \pm 2,4409578$$

cuyos valores se colocan en la llave (N) y se tiene resuelto el triángulo.

Esc. Si se conociese la hipotenusa y un cateto, se despejaria en la analogía general el segundo y cuarto término, y quedaria resuelto el triángulo.

467 Si se diesen en el mismo triángulo un cateto AC y el ángulo *A* como se ve en (M); para hallar el ángulo *B* se restará el *A* de 90°, y se tendrá el *B* de 50°33′23″,2 como se ve en (N).

(M)	(N)
AC=829 varas.	*B*=50°33′23″,2.
Áng.*A*=39°26′36″,8.	BC=682,004 varas.
Áng. C=90°.	AB=1073,485.

Para hallar el lado BC nos servirá la segunda analogía, que dará $R:\text{tang}.39^\circ 26'36'',8::829:CB$, que por logaritmos será:

$$\log.CB = \begin{cases} \log.\text{tang}.39^\circ 26'30'' = 9,9152034 \\ \text{par.cor.á} \ldots\ldots 6'',8 = \quad 292 \\ \log.829 \ldots\ldots = 2,9185545 \\ \text{comp.log.}R \ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

$$\text{suma ó log.}682,004 = \pm 2,8337871$$

El lado AB le hallarémos por la primera analogía invertida, que dará $\cos.39^\circ 26'36'',8:R::829:AB$, que por logaritmos será:

$$\log.AB = \begin{cases} \log.829 \ldots\ldots = 2,9185545 \\ \log.R \ldots\ldots = 10, \\ \text{com.log.cos.}39^\circ 26'36'',8 = 0,1122416 \end{cases}$$

$$\text{suma ó log.}1073,485 = \pm 3,0307961$$

Esc. 1.° Si se diesen los dos catetos se despejaria el segundo término de la proporcion (A, 465), y despues se hallaria la hipotenusa; con lo cual quedaria resuelto el triángulo.

Esc. 2.° En los triángulos se pueden siempre conocer dos datos sin necesidad de analogías, á saber, un ángulo en conociendo los otros dos (lo cual conviene igualmente á los oblicuángulos); y uno cualquiera de los lados, cuando se conocen los otros dos (332 cor.). Aunque es mas sencillo en estos casos el cálculo logarítmico, sin embargo aquel puede servir de comprobacion, como se ve en el primer caso, en que se tiene $327^2 = 175{,}317^2 + 276{,}031^2$ con menos de dos décimas de diferencia, que en nada influyen.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

468 La resolucion de los triángulos oblicuángulos está fundada en esta proposicion general:

Los senos de los ángulos son como sus lados opuestos.

Dem. En efecto, si en el triángulo ABC (fig. 147) circunscribimos un círculo, y desde el centro O se tiran las OQ, OR, OS, perpendiculares á las AC, CB, AB, y se une tambien el centro O con los vértices de los ángulos, se tendrá que el ángulo ABC será igual al AON, porque ambos tienen por medida el arco AN; y como el seno de AON es $AQ = \frac{1}{2}AC$, este mismo será el seno del ángulo ABC, ó $\text{sen.}ABC = \frac{1}{2}AC$.

Asimismo será $\text{sen.}BCA = \frac{1}{2}AB$, y $\text{sen.}BAC = \frac{1}{2}BC$; y formando tres razones de igualdad, será

$$\text{sen.}ABC : \tfrac{1}{2}AC :: \text{sen.}BCA : \tfrac{1}{2}AB :: \text{sen.}BAC : \tfrac{1}{2}BC.$$

Multiplicando por 2 los consecuentes, y escribiendo abreviadamente, será

$$\text{sen.}ABC : \text{sen.}BCA : \text{sen.}BAC :: AC : AB : BC,$$

ó (335 esc. 1.°) mas general

$\text{sen.}A : \text{sen.}B : \text{sen.}C :: a : b : c$, que es L. Q. D. D.

469 Pasamos á resolver algunos ejemplos, y sea el primero, *dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

Para poder aplicar á este caso la analogía general, es necesario demostrar que *la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de su semidiferencia.*

Para lo cual, la proporcion general

sen.A:BC::sen.B:AC, dará (§ 184, 6.ª)

sen.A+sen.B:sen.A—sen.B::BC+AC:BC—AC(m).

Sean ahora BS, CP (fig. 148) los senos de dos arcos AP, AC; si se tira el diámetro AM y se prolonga la BS, será (294) el arco AD=ACB; por consiguiente se tendrá DAC=AB+AC, y CB=AB—BC.

Tírese ahora la CF paralela al diámetro AM, y será $\begin{cases}\text{DE=DS+SE=BS+CP=sen.AB+sen.AC,}\\ \text{BE=SB—SE=SB—CP=sen.AB—sen.AC.}\end{cases}$

Si se tiran las cuerdas BF, DF, y con un radio FG igual al del círculo, se describe un arco hGK, se tendrá GK=$\frac{1}{2}$CAD=$\frac{1}{2}$(DA+CA)=$\frac{1}{2}$(BA+AC), por ser ambas espresiones medida del ángulo DFG; por la misma razon será Gh=$\frac{1}{2}$BC=$\frac{1}{2}$(AB—AC).

Luego si por el punto G se tira la tangente lGL, la parte GL será la tangente del arco GK=$\frac{1}{2}$(BA+AC), y la parte Gl será la tangente del arco Gh=$\frac{1}{2}$(AB—AC).

Pero los triángulos DEF, FGL, BEF, FGl.

dan $\begin{cases}\text{FE:FG::DE:GL}\\ \text{FE:FG::BE:G}l\end{cases}$

que dan DE:GL::BE:Gl, ó DE:BE::GL:Gl; y sustituyendo en vez de estas líneas los valores que hemos hallado ántes, se tendrá

sen.AB+sen.AC:sen.AB—sen.AC::

tang.$\frac{1}{2}$(AB+AC):tang.$\frac{1}{2}$(AB—AC) (n),

que quiere decir, que *la suma de los senos de dos arcos ó de dos ángulos es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de dichos arcos es á la tangente de la semidiferencia.*

Y como haciendo AB$=A$, AC$=B$, las proporciones (m) y (n) tienen comun la primera razon, las otras darán

BC+AC:BC—AC::tang.$\frac{1}{2}(A+B)$:tang.$\frac{1}{2}(A-B)$, que es la proporcion enunciada.

Pasemos ahora á la resolucion del triángulo ABC (fig. 149), en que se conocen los datos que se ven en M;

(M)	(N)
BC=748 varas.	$A=55°35'49'',73$.
AC=659 varas.	$B=46°37'41'',77$.
Áng.C$=77°46'28'',5$.	AB=886,014 varas.

y observarémos que conocido el ángulo C la suma de los otros dos $A+B$ será tambien conocida, y será

$180°-77°46'28'',5=102°13'31'',5$ y $\frac{1}{2}(A+B)=51°6'45'',75$; luego la proporcion anterior se convertirá en

748+659:748—659::tang.$51°6'45'',75$:tang$\frac{1}{2}(A-B)$, ó 1407:89::táng.$51°6'45'',75$:tang.$\frac{1}{2}(A-B)$; de donde sale

$$\text{log.tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\begin{cases}\text{log.tan.}51°6'40''=10,0933536\\ \text{par.cor.á...}5'',75= \quad 247\\ \text{log.}89\text{............}= \quad 1,9493900\\ \text{comp.log.}1407\text{...}= \quad 6,8517059\end{cases}$$

suma ó log.tang.$4°29'3'',98=18,8944742$

Conocida la mitad de la suma y de la diferencia de los ángulos A y B; tendrémos (§ 154)

$A=51°6'45'',75+4°29'3'',98=55°35'49'',73$,

y $B=51°6'45'',75-4°29'3'',98=46°37'41'',77$.

Para hallar el lado AB tenemos esta proporcion

sen.A:BC::sen.C:AB ó

sen.$55°35'49'',73$:748::sen.$77°46'28'',5$:AB, que da.

$$\log.AB=\begin{cases}\text{log.sen}\ldots\ldots\ldots 77^\circ 46' 20'' = & 9{,}9900338\\ \text{par.cor.á}\ldots\ldots\ldots 8'',5 = & 39\\ \text{log.}748\ldots\ldots\ldots\ldots = & 2{,}8739016\\ \text{com.log.sen.}55^\circ 35' 49'',73 = & 0{,}0835011\end{cases}$$

suma ó log. $886{,}014 = +2{,}9474404$

Con lo cual queda resuelto el segundo caso y las partes buscadas son las que se ven en (N).

470 *Dados dos ángulos y un lado, hallar el otro ángulo y los dos lados.*

Si en el triángulo ABC (fig. 150) se tienen los datos (M), lo primero se hallará el tercer ángulo

(M)	(N)
Áng.C $=74^\circ 5' 37'',6$	$B=42^\circ 30' 28'',7$.
Áng.$A=63^\circ 23' 53'',7$.	AC $=652{,}16$ varas.
BC $=863$ varas.	AB $=928{,}218$ varas.

que será $B=180^\circ-(74^\circ 5' 37'',6+63^\circ 23' 53'',7)=$
$180^\circ-137^\circ 29' 31'',3=42^\circ 30' 28'',7$.

La analogía general sen.A:BC::sen.B:AC::sen.C:AB, será sen.$63^\circ 23' 53'',7$:863::sen.$42^\circ 30' 28'',7$:AC:: sen.$74^\circ 5' 37'',6$:AB.

Despejando el cuarto y sesto término, se tiene

$$\log.AC=\begin{cases}\text{log.sen}\ldots\ldots\ldots 42^\circ 30' 20'' = & 9{,}8297293\\ \text{par.cor.á}\ldots\ldots\ldots 8'',7 = & 200\\ \text{log.}863\ldots\ldots\ldots\ldots = & 2{,}9360108\\ \text{com.log.sen.}63^\circ 23' 53'',7 = & 0{,}0485942\end{cases}$$

suma ó log. $652{,}16 = +2{,}8143543$

$$\log.AB=\begin{cases}\text{log.sen}\ldots\ldots\ldots 74^\circ 5' 30'' = & 9{,}9830403\\ \text{par.cor.á}\ldots\ldots\ldots 7'',6 = & 46\\ \text{log.}863\ldots\ldots\ldots\ldots = & 2{,}9360108\\ \text{comp.log.sen.}63^\circ 23' 53'',7 = & 0{,}0485942\end{cases}$$

suma ó log. $928{,}218 = +2{,}9676499$

Con lo cual queda resuelto el triángulo, y el valor de las partes buscadas es el que se ve en (N).

471 *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, hallar el tercer lado y los dos ángulos.*

Este caso se resuelve como el anterior, y puede en algunos casos dar dos soluciones, porque los datos pueden convenir á dos triángulos (438).

472 Las construcciones preparatorias que hemos tenido que hacer, se podrian evitar si entre las seis cosas que entran en un triángulo se pudiesen encontrar tres ecuaciones; pues en este caso *dadas tres cosas se tendrian tres ecuaciones con tres incógnitas, que se despejarian inmediatamente.* Para esto observarémos, que (figs. 77 y 78) por lo dicho (345 esc. 1.°) se tiene $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2b \times \mathrm{CD}$; y como (§ 464 esc.) $\mathrm{CD} = a\cos.\mathrm{BCD}$, y en la figura primera que es la que da el signo $+$ del $\pm$, se tiene $\cos.\mathrm{BCD} = -\cos.\mathrm{BCA} = -\cos.\mathrm{C}$, sustituyendo este valor y sacando los análogos para los demas, se tendrá $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos.\mathrm{C}$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos.B$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos.A$, que sirven para conocer un lado, cuando se conocen los otros dos y el ángulo que forman.

Despejando los cosenos de los ángulos se tendrá

$$\cos.\mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \cos.B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

que sirven para conocer un ángulo cuando se conocen los tres lados.

Esc. Estas fórmulas se pueden poner bajo una forma á que se puede aplicar inmediatamente el cálculo logarítmico.

Idea general de la resolucion de los triángulos esféricos.

473 Queda indicado, y ahora repetimos, que se llama *triángulo esférico* una porcion de la superficie

de una esfera, comprendida por tres arcos de círculo máximo; tal es el ABC (fig. 151) que suponemos construido en la superficie de una esfera, cuyo centro está en O, y cuyos lados son los arcos de círculo máximo AB, AC, BC.

Para fijar bien las ideas, conviene saber que *todo triángulo esférico ABC determina en el centro O de la esfera un ángulo sólido, compuesto de tres planos AOB, AOC, BOC, que tienen por medida respectivamente los arcos ó lados del mismo triángulo AB, AC, BC.*

Ademas, *el ángulo esférico CAB es el mismo que el que forman las dos tangentes AE, AD, tiradas en el vértice A, respectivamente á cada arco AC, AB.*

Porque la inclinacion de estos arcos es la misma que la de los planos OAE, OAD en que se hallan, y cuya interseccion comun es el radio AO; pero la inclinacion de estos planos se mide (377) por el ángulo rectilíneo EAD formado por las dos perpendiculares AE, AD, á un mismo punto A de la comun interseccion; luego este ángulo será tambien el formado por los arcos AC, AB, ó el esférico BAC.

474 Esto supuesto, lo que nos proponemos es hallar la relacion que tienen entre sí los lados AB, AC, BC, que llamarémos c, b, a, y los ángulos C, B, A, del triángulo esférico ABC.

Para esto, sea el radio OA$=1$, y prolónguense los OC, OB, hasta que encuentren las tangentes en E y en D, y será AE la tangente trigonométrica del arco AC, y OE será la secante; y AD, OD serán la tangente y secante del arco AB. Unanse los puntos D y E, y el triángulo rectilíneo ADE dará (§ 472)

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \times AD \times \cos. A;$$

ó haciendo DE$=x$, y sustituyendo en vez de estas líneas los valores que les hemos dado ántes, será $x^2 = \text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2\,\text{tang.} b\,\text{tang.} c \cos. A$; el triángulo ODE dará igualmente

$$x^2 = \sec.^2 b + \sec.^2 c - 2 \sec. b \sec. c \cos. a.$$

Restando de esta ecuacion la anterior se tendrá

$o = \sec.^2 b + \sec.^2 c - 2\sec.b\sec.c\cos.a -$
$\tang.^2 b - \tang.^2 c + 2\tang.b\tang.c\cos.A$;.
y teniendo presente (445 esc.) que $\sec.^2 b - \tang.^2 b = 1$
y $\sec.^2 c - \tang.^2 c = 1$,

Esta ecuacion despues de dividir por 2 se convertirá en $1 + \tang.b\tang.c\cos.A - \sec.b\sec.c\cos.a = 0$; y sustituyendo en vez de tang. y sec. sus valores, se tendrá $1 + \frac{\text{sen}.b}{\cos.b} \times \frac{\text{sen}.c}{\cos.c} \times \cos.A - \frac{1}{\cos.b} \times \frac{1}{\cos.c} \times \cos.a = 0$:

ó haciendo las operaciones, reduciendo el entero á la especie del quebrado, suprimiendo el denominador, y despejando cos.a, se tendrá
$\cos.a = \cos.b\cos.c + \text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.A$; y haciendo una construccion semejante en cada ángulo se tendrá el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \cos.a = \cos.b\cos.c + \text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.A \\ \cos.b = \cos.a\cos.c + \text{sen}.a\,\text{sen}.c\cos.B \\ \cos.c = \cos.a\cos.b + \text{sen}.a\,\text{sen}.b\cos.C \end{array}\right\} \text{(M)};$$

que sirven para conocer un lado, cuando se conocen los otros dos y el ángulo que forman.

475 Despejando en la primera cos. A, se tendrá

$$\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b\cos.c}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c};$$

y si en la ecuacion, $\text{sen}.^2 A = 1 - \cos.^2$, sustituimos este valor, será

$$\text{sen}.^2 A = 1 - \frac{\cos.^2 a + \cos.^2 b\cos.^2 c - 2\cos.a\cos.b\cos.c}{\text{sen}.^2 b\,\text{sen}.^2 c}.$$

Reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, sustituyendo en el numerador $1 - \cos.^2$ en vez de $\text{sen}.^2$, efectuando la multiplicacion y reduccion, multiplicando arriba y abajo por $\text{sen}.^2 a$, y estrayendo la raiz cuadrada se tendrá

$$\text{sen}A = \text{sen}.a \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos.a\cos.b\cos.c}}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b\,\text{sen}.c}$$

Representando por F la fraccion que multiplica á sen.a, y haciendo operaciones análogas con las otras dos ecuaciones (M), se tendrá sen.A=F×sen.a, sen.B=F×sen.b, sen.C=F×sen.c, que dan sen.A:sen.B:sen.C::sen.a:sen.b:sen.c; que es la analogía general de los triángulos esféricos y se enuncia: *los senos de los ángulos son como los senos de los lados opuestos.*

476 Despejando los cosenos de los ángulos en las ecuaciones (M), se tendrá $\cos.A=\frac{\cos.a-\cos.b\cos.c}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}$,

$\cos.B=\frac{\cos.b-\cos.a\cos.c}{\text{sen}.a\,\text{sen}.c}$, $\cos.C=\frac{\cos.c-\cos.a\cos.b}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}$;

que sirven para conocer un ángulo cuando se conocen los tres lados del triángulo. Pero para hallar el ángulo A, v. g. seria menester calcular separadamente por logaritmos los términos cos.a y cos.$b$cos.c, hallar los números á que correspondian, restar estos, y despues hallar el logaritmo de la diferencia, y restar de él el logaritmo de sen.$b$sen.c, y esta última diferencia seria el logaritmo de cos.A; y como esta operacion seria muy embarazosa en la práctica, se han dado á dichas ecuaciones varias transformaciones, con las cuales quedan resueltos en factores los segundos miembros, en esta forma:

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}.\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}}$$

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen}.\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}.\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.c}}$$

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+c-a)\,\text{sen}.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}}$$

cuyas fórmulas sirven para el mismo objeto, y se les puede aplicar inmediatamente el calculo logarítmico.

GEOMETRÍA PRÁCTICA,

Ó APLICACION DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL Á LAS DIFERENTES OPERACIONES QUE SE EJECUTAN EN EL TERRENO.

De la nivelacion.

477 Se llama *nivelacion* la operacion que enseña á determinar lo que un punto está mas ó ménos distante que otro del centro de la tierra. Para proceder con acierto en lo que vamos á esponer, debe saberse que la tierra que hasta estos últimos tiempos se habia tenido por esférica, se ha hallado que tiene la figura de una naranja, esto es, aplanada hácia los polos, y prolongada hácia el ecuador; este aplanamiento no influye nada en las operaciones ordinarias, y por lo mismo supondrémos que la tierra es esférica como se ve (fig. 152). Los puntos A, B, son los *polos*, la línea AB, se llama el *eje* de la tierra; y la línea CD el *diámetro*; todo círculo máximo que pasa por los polos, se llama *meridiano* de la tierra; y el círculo máximo perpendicular al meridiano, se llama *ecuador*. El *horizonte* de un lugar es el plano tangente á la superficie de la tierra, cuyo punto de contacto es el lugar mismo del observador; *línea horizontal* es cualquier recta que se halla en este plano; *línea vertical* es la prolongacion del radio terrestre perpendicular al horizonte; un hilo de cuyo estremo cuelga un cuerpo cualquiera, señala la direccion vertical.

478 Esto supuesto, todos los puntos de la superficie de las aguas, cuando se hallan en quietud, ó en jeneral dos ó mas puntos equidistantes del centro de la tierra, están á un *mismo nivel*, ó están en el *nivel verdadero*; tales son los A, R, D, &c.; y tambien lo están los P, Q y M, N, equidistantes del punto de contacto A de la horizontal MN. Los

puntos que como A, Q, N, &c. distan desigualmente del centro O, se dice que están en el *nivel aparente*; por lo cual la línea horizontal AN, se llama *línea de nivel aparente*; y la circunferencia terrestre ADBC, ó cualquiera otra concéntrica con ella, se llama *línea de nivel verdadero*. Así, los puntos A, Q, están en el nivel aparente; los A, R, en el verdadero; y la parte QR del radio OR prolongado hasta Q, es lo que se llama *diferencia del nivel aparente al verdadero*. Cuando se hacen nivelaciones grandes y de importancia conviene tener en consideracion esta diferencia.

479 En este compendio omitimos la descripcion de los instrumentos con que se ejecutan las operaciones, tanto porque con sola la esplicacion sin tenerlos á la vista, es imposible formar una idea de ellos, como porque su presencia y cuatro palabras del profesor aprovechan mas que diez hojas de esplicacion. No obstante en el tratado elemental se halla la esplicacion de cada uno y la figura que le reprenta; y así, suponiendo que se tienen, decimos que para nivelar una piedra, una mesa, un plano de cualquier instrumento, se emplea el *nivel de albañil* ó el *de aire*.

480 Para nivelar puntos que no disten demasiado, se emplea el *nivel de agua*; y si la nivelacion ha de ser muy grande, se usan *niveles de aire* con pínulas ó anteojo.

Cuando para averiguar la diferencia del nivel entre dos puntos, solo se coloca el nivel en un paraje, se llama *nivelacion simple*; y cuando en dos ó mas, *nivelacion compuesta*.

Si se quiere hallar la diferencia del nivel entre los dos puntos C y D (fig. 153), se colocará el nivel en B, sobre poco mas ó ménos á igual distancia de C y D, y en línea recta con ellos; se echará agua en el nivel, y clavando dos miras verticalmente en C y D, se mirará por los puntos M, N de la superficie del agua, haciendo que otro suba ó baje la ta-

blilla de la mira, hasta que la visual tirada por M y N, vaya á parar á la línea que separa lo blanco de lo negro, con lo cual los puntos E, F serán dos puntos de nivel verdadero. Ahora, midiendo con una vara dividida en pulgadas y líneas, ó mejor en pies y decimales de pie, las alturas CE, DF, y restándolas, el residuo será la diferencia del nivel entre C y D, estando mas alto el punto C, cuya altura CE se ha encontrado menor.

Esc. Para asegurar mejor la direccion de las visuales, suelen tener las tablillas de las miras la forma que representa la (fig. 153*); esto es, que suelen ser cuadradas ó circulares, con dos líneas ó diámetros que se crucen á ángulos rectos; y entónces el punto de interseccion de dichas líneas es el punto donde se debe dirijir la visual.

481 Si la distancia entre los puntos es muy considerable, se emplea la nivelacion compuesta, del modo siguiente. Supongo que se quiere hallar la diferencia de nivel entre los dos puntos A y D (fig. 154); lo primero se clava una mira en A, y se coloca el nivel en E; y (para no tener que atender á la diferencia del nivel aparente al verdadero) á igual distancia sobre poco mas ó ménos, si se puede, v. g. en B, se clava otra mira ó estadal; se señalan los puntos *a* y *b* de nivel, se averiguan las alturas A*a* y B*b*, y se apuntan en un papel. Despues se pasa el nivel á otro punto F, dejando clavada la mira en B, y á igual distancia sobre poco mas ó ménos se coloca otra mira en C, se señalan los puntos de nivel *e*, *c*, y se apuntan las alturas B*e*, C*c*. Se pasa el nivel á G, y con las mismas circunstancias que ántes, se averigua el valor de C*f*, D*d*. Se suman los valores de A*a*, B*e*, C*f*, que representan las alturas de los primeros términos, se suman igualmente los valores de B*b*, C*c*, D*d*, que representan las de los segundos; se restan estas dos sumas, y el esceso espresará la diferencia de nivel: estando mas alto el primer término, si la suma de los primeros

términos es menor; y el segundo, si la de estos lo es.

De la medicion de las líneas.

482 Para ejecutar cualquier operacion, es necesario primero medir una línea ausiliar, que se llama *base.* Los instrumentos que ordinariamente se emplean, son: una *cadena* ó *cuerda* de 100 pies (ó ménos), *jalones*, *piquetes* y un *mazo.*

Así, si se quiere medir la distancia de A á E (fig. 155), se colocarán los jalones B, C, D, en los puntos intermedios, de manera que mirando desde A á E queden todos cubiertos; despues de estar alineada ya la recta, se empieza la medicion con la cadena ó cuerda, procurando que esté bien tirante, y segun las veces que se coloque se deducirá el número de pies de que consta la línea dada.

483 Con solo la cadena y los jalones se pueden resolver varios problemas.

1.° *Formar un ángulo recto, ó tirar una perpendicular á una línea dada.*

Res. y *Dem.* Tómense 12 pies ó unidades en la cadena; con los lados 3, 4 y 5, en que se descompone el 12, fórmese un triángulo, y el ángulo comprendido por los lados 3 y 4 será el ángulo recto pedido, y por consiguiente el un lado perpendicular al otro. Porque valiendo los lados del triángulo 3, 4 y 5, se tiene $3^2+4^2=5^2$; luego el triángulo que se ha construido (335, esc. 2.°) es rectángulo.

Esc. Si se pidiese un ángulo de sesenta grados se formaria un triángulo equilátero.

484 Cuando se han de tirar muchas perpendiculares, como sucede cuando hay que medir algun terreno, ó se va á trazar un campamento, se lleva el aparato que se llama *cuerda de perpendiculares,* y consiste en un triángulo isósceles (fig. 156) ó equilátero con el cordel CE que divide en dos partes iguales la base AB y señala la direccion de la perpendicular.

Para hacer uso de ella se aplica la base AB sobre la línea á que se ha de tirar la perpendicular de modo que el punto E caiga sobre el punto de la línea en que se ha de levantar; y tirando del estremo M la cuerda EM, se tendrá la perpendicular pedida.

Si este aparato se hiciese de madera fuerte, se podria llamar *escuadra doble*, y serviria con mucha utilidad para tirar perpendiculares en puntos de líneas dadas, como para tirarlas desde puntos dados fuera de ellas.

485 2.° *Medir una línea inaccesible.*

Res. y *Dem.* Sea AB (fig. 157) la línea inaccesible; á causa del rio que la atraviesa; levántese en su estremo B una perpendicular BL; divídase en dos partes iguales en H, y clávese en este punto un piquete; levántese en L la perpendicular indefinida LD; búsquese el punto D, desde el cual tirando una visual por H vaya á parar al punto A, y la línea LD será igual á la distancia AB que se pedia.

Porque los triángulos ABH, HLD, son rectángulos en B y L, y tienen BH=HL por construccion, y los ángulos en H iguales por opuestos al vértice; luego estos triángulos son iguales, y dan AB=LD.

486 Tambien se pueden medir las alturas accesibles é inaccesibles por su pie. Así, si se quiere medir la torre AB (fig. 158), se plantará bien verticalmente un jalon EC; á alguna distancia de este jalon, se plantará otro DF, de manera que se pueda ver el estremo A de la torre por un rayo visual FEA que rase con el estremo del piquete. Mírese tambien un punto de la torre tal como G por un rayo visual FG que pase por H, de manera que CH=DF.

Hecho esto, si se concibe la FG, será paralela é igual á la DB, y se tendrán los dos triángulos semejantes AGF, EHF, que dan FH:HE::FG:AG; y como los tres primeros términos de esta proporcion son conocidos, porque se pueden medir, se sigue que si al cuarto AG se añade la parte GB que

está debajo de la línea GF, que tambien se puede medir, se tendrá la altura AB de la torre ó de cualquier otro objeto.

Esc. Si la torre fuese inaccesible por su pie, se mediria primero por el método anterior la distancia inaccesible BC ó BD, y se ejecutaria lo demas como se acaba de manifestar.

De la medicion de los ángulos.

487 Para medir los ángulos sirven muchos instrumentos, á saber: la *plancheta*, *grafómetro*, *brújula*, *teodolito*, *cuadrantes de círculo*, *círculos repetidores*, y *recipiángulos*. En el papel se trazan y miden los ángulos con un semicírculo ACB graduado (fig. 159), que se coloca de modo que el centro O caiga en el vértice del ángulo, y sobre uno de los lados el diámetro del mismo círculo. De manera que si colocado sobre el ángulo BOD, hallamos que OD cae sobre la línea que señala 45°, dirémos que este es el valor de dicho ángulo. Para que en uno de estos semicírculos se pudiesen trazar medios grados, se necesitaria que fuese de un radio bastante grande; y si se quisiesen trazar hasta minutos, seria muy embarazoso el uso del instrumento. Para evitar esto se ha ideado un medio sencillo, para obtener los ángulos con instrumentos de una regular magnitud.

448 Para esplicarle, sea ACB (fig. 160) el borde ó el *limbo* de un instrumento, que esté dividido en partes que se distingan bien; v. g. en grados; tómese un número cualquiera de grados en el limbo, v. g. 9°; tómese ahora otra pieza del mismo metal que el instrumento, y de una magnitud igual á la de los 9° que se tomaron, la cual se dividirá en 10 partes iguales, esto es, en una mas que las que se tomaron en el instrumento; de consiguiente, cada espacio de esta pieza (que es lo que se llama *núñez*) vale $\frac{9}{10}$ de grado ó 54 minutos; y la diferen-

cia de una division del *núñez* á una del *limbo*, ó á un grado, valdrá 6′. La pieza donde está el núñez se aplica sobre el limbo, y jira al rededor del centro del instrumento (ó al contrario permanece fijo el núñez y jira el limbo); la primera division del núñez, tiene por lo regular una *flor de lis*, y se llama *línea de fe*; esta se hace que coincida con la division 0° ó 180° en jeneral, ó sobre otra graduacion cualquiera del limbo; y la magnitud de un ángulo se aprecia por lo que se separa la línea de fe de dicha graduacion. Ahora, si la línea de fe coincide exactamente con una division del limbo, el valor del ángulo será el número de grados comprendido desde cero hasta dicha línea; pero si la línea de fe cae entre dos divisiones del limbo, el ángulo pedido valdrá un cierto número de grados, y una parte de grado que se valúa por la regla siguiente: *véase la division del núñez que mas coincide con una del limbo; cuéntense los espacios del núñez desde la línea de fe hasta la que coincide con la del limbo; multiplíquese el número de espacios hallado por la diferencia 6′* (en nuestro caso, ó por lo que valga segun otra division) *que hay entre el espacio del limbo al del núñez; y el producto serán los minutos que se deberán añadir al número de grados hallado.*

Con un ejemplo se entenderá bien esta regla y su demostracion. En efecto, si se quiere averiguar el valor del ángulo AOG, este valdrá el número de grados del limbo comprendido desde A hasta *m* (que aquí son 3), y ademas la parte *m*G; ahora, la línea del núñez que mas concurre con la del limbo, es la que pasa por B; y multiplicando los seis espacios del núñez que hay desde OG hasta B por 6′, el producto 36′ serán los que se deben añadir á los 3° hallados; por lo que, el ángulo AOG vale 3° 36′. Porque si la línea del núñez que coincide con la del limbo fuese la primera de aquel, el espacio *m*G valdria una vez la diferencia de los espacios del limbo y del núñez, esto es, 6′; si fuese la segunda, el

dicho espacio valdria 12′ ó 2×6′; si fuese la tercera valdria 18′ ó 3×6′, y así sucesivamente; luego siendo la sesta, el espacio *m*G valdrá 6×6′=36′, L. Q. D. D.

489 Para averiguar los ángulos que forman entre sí tres puntos que se hallan sobre el terreno, se emplea jeneralmente la plancheta (fig. 161); sobre el tablero se estiende un pliego de papel, se señala el punto A adonde corresponde el vértice Q del ángulo del terreno; por las cerdas *t*, de la regla FG que se llama *alidada*, se dirijen visuales á los otros puntos C y B, y estas visuales se señalan con un lapicero sobre el papel, donde queda formado el ángulo *bAc*, igual al que forman los tres puntos B, Q, C, del terreno; y midiendo este ángulo con el semicírculo, se tendrá el que se deseaba sobre el terreno.

490 Por lo regular, lo que se intenta buscar es el ángulo que forman dichos objetos, suponiéndolos proyectados en un plano horizontal que pase por el vértice; entónces es esencial que se coloque el tablero en una situacion horizontal por medio de los niveles; y como en este caso puede ocurrir el que los objetos B y C no se vean por el espacio que ocupan las cerdas, es preferible á la alidada un anteojo A (fig. 162), el cual ademas de tener la circunstancia de poder bajar y subir la puntería cuanto se necesite, reune la ventaja de distinguir los objetos con claridad y á mayor distancia.

491 Otro de los instrumentos que sirven para medir los ángulos es la brújula (fig. 163).

Su construccion y uso estriban en que las agujas tocadas á lo que se llama *piedra iman*, se dirijen hácia el norte; y si colocada en un paraje se mira á un objeto cualquiera, y se ve el ángulo que forma la aguja NS con la línea AB; y luego se mira á otro objeto y se determina el mismo ángulo, la diferencia entre estos dos ángulos observados, será el ángulo que forman dichos objetos, si la aguja ha

permanecido en ambos casos á un mismo lado de la línea AB.

Si al enfilar el otro objeto, la aguja pasase al otro lado de la línea AB, el ángulo buscado estaria representado por la suma de los dos observados.

492 De todos los instrumentos que se han inventado para las operaciones geodésicas, los mas á propósito son el teodolito, y el círculo repetidor de Bordá.

La primera operacion que se practica es nivelar el teodolito, y tiene la ventaja de dar á un mismo tiempo y con un solo anteojo (aunque algunos tienen dos), los ángulos horizontales y de elevacion.

493 Como la division de los instrumentos no puede llegar al grado de exactitud del cálculo, y que se requiere en algunas ocasiones, se ha ideado el círculo repetidor, el cual tiene la propiedad de que en vez del ángulo que se quiere averiguar, se puede tomar el duplo, el triplo, el cuádruplo, &c. y dividiendo despues por 2, por 3, por 4, &c., se tendrá el ángulo pedido con la mitad, tercera, cuarta, &c. parte del error que se debe sospechar en el instrumento.

Medir alturas y distancias accesibles é inaccesibles, y modo de levantar los planos topográficos.

494 Cuando se puede uno acercar al pie de una altura AB (fig. 164), y en su plano se puede medir una base, se elije esta de manera que sea sobre poco mas ó ménos igual con la altura por medir; se coloca el instrumento en su estremo, y con él se mide el ángulo de elevacion AFG; con lo cual el rayo visual AF, el horizontal GF, y la parte AG de la altura, formarán un triángulo rectángulo, en que se conoce ademas del ángulo recto en G, uno de los ángulos agudos, y el cateto FG que es igual con la base medida BD; luego (465) hallarémos al lado AG, diciendo R:tang.AFG::GF=BD:AG;

y añadiendo á esto la parte BG, se tendrá toda la altura AB.

495 Cuando hay algun obstáculo que impida el acercarse al pie como en la (fig. 165), y se puede medir sin embargo una base AB en el plano de su pie, se procede del modo siguiente: colocado el instrumento en A, se toma el ángulo de elevacion CAD; y colocado en B el ángulo CBA; con lo cual tenemos en primer lugar un triángulo CAB, en que conocemos el ángulo en B y el lado AB, porque los hemos medido, y el ángulo CAB por ser suplemento del medido CAD, y en virtud de lo dicho (470) hallarémos el lado CA. Conocido este, queda determinado en el triángulo rectángulo CAD la hipotenusa y un ángulo, y podrémos hallar (466) el cateto CD que es la altura que deseamos.

496 Muchas veces no se sabe si la base está ó no en el mismo plano del pie de la altura, y aun el que no se vea el pie de la altura por medir: en este caso es un poco mas complicada la operacion.

Supongamos que se quiera medir la altura inaccesible CD (fig. 166); medirémos donde el terreno lo permita una base AB; en el estremo A se colocará el instrumento, y se tomará el ángulo horizontal BAD y el vertical CAD; colocando en el otro estremo B el instrumento, se tomará el ángulo horizontal DBA, y el vertical CBD. Hecho esto, el triángulo DAB nos dará (470) el valor de uno cualquiera de los lados, tal como AD; con lo cual en el triángulo rectángulo CAD se conocerá el cateto AD, y el ángulo CAD; luego (465) nos dará el valor de CD, que es lo que se pedia.

497 Cuando la distancia que se intenta medir es accesible, se ejecuta conforme hemos dicho se mide una base; cuando solo es accesible por uno de sus estremos, se procederá del modo siguiente.

Supongamos que sea la BC (fig. 167) la línea que se quiera medir; en este caso se medirá una base CA desde el estremo accesible C, y en sus estremos me-

dirémos los ángulos BCA, CAB, y la Trigonometría (470) nos dará el lado BC. Para hacer esta operacion con la plancheta, se coloca este instrumento de manera que su centro corresponda sobre el punto C del terreno; despues se tira en el papel una línea *ca* en la direccion de la base, de una magnitud tal que contenga tantas partes de una escala cualquiera, como veces está contenida la unidad de medida en la base CA; despues se dirije la visual por C al punto B, y se tira la *cb* indefinida; despues se pone el instrumento en A, y colocado el tablero de modo que la base *ca* se halle en la direccion AC de la base medida, se dirije la visual al punto B, se tira la *ab*, y el número de partes que *cb* contenga en la misma escala, será el número de unidades que contenga la BC de la medida con que se midió la base CA.

498 Si la distancia CD (fig. 168) es de todo punto inaccesible, medirémos una base AB que sea próximamente paralela é igual con la distancia por medir CD. En A tomarémos los ángulos CAB, DAB, y pasando el instrumento á B tomarémos los ángulos CBA, DBA, y tendrémos conocido en el triángulo CAB el lado AB y los ángulos adyacentes; luego la Trigonometría (470) dará el valor del la AC. En el triángulo DAB se conoce igualmente el lado AB y los ángulos adyacentes; luego podrémos hallar el valor del lado AD. Ahora, en el triángulo CAD tenemos conocidos los lados CA, AD, por lo que acabamos de decir, y el ángulo CAD que forman, por ser la diferencia entre los dos ángulos observados CAB, DAB; luego la Trigonometría (469) dará la distancia CD que buscábamos.

499 Para hacer esta operacion con la plancheta, se coloca el instrumento en uno de los estremos de la base, tal como A, y despues de tirada la *ab* en la direccion de ella, se dirijen las visuales á los puntos C, D, y se tiran en el papel las *ac*, *ad*; despues se pasa el instrumento á B y se tiran las *bc*, *bd*, en la direccion de las visuales dirijidas á los

puntos C y D; y tomando con un compas la distancia *cd*, y averiguando su valor en la misma escala en que se tomaron las partes de *ab*, que espresaban las unidades de medida de AB, se tendrá el número de unidades que contiene la CD.

500 Se llama *mapa* ó *plano topográfico* el dibujo en que están representados todos los objetos de un pais de corta estension. Para manifestar cómo se consigue esto, supondrémos que se nos dé un terreno, en el que se hallan los objetos C, D, E, F, G, H, K, L (fig. 169), y que se quiere sacar un dibujo en que los objetos guarden la misma posicion que tienen en el terreno.

Para esto, lo primero que se ejecuta es medir una base AB, desde cuyos estremos se vea el mayor número de objetos posible; se colocará el instrumento en A, y se dirijirán visuales á los puntos C, D, E, F, &c. que se ven desde ambos estremos de la base; se pasará el instrumento á B, y se dirigirán visuales á los mismos objetos; y tendrémos que si el instrumento era la plancheta, el concurso de las visuales en el papel determinará los objetos; y si no lo es, en los estremos *a* y *b* de una línea *ab*, de la misma magnitud que la base medida, se forman con un semicírculo, los ángulos *cab*, *dab*, &c. del mismo número de grados que los ángulos observados CAB, DAB, &c. con lo cual los lados de estos ángulos prolongados, determinarán por su concurso los puntos *c*, *d*, &c. Tambien se pudieran calcular por Trigonometría los lados *ac*, *ad*, &c., pero esto es mas complicado.

Para fijar la posicion de los puntos K, H, L, que no se ven desde ambos estremos de la base AB, se elije una nueva base que se procura tenga sus estremos en dos puntos fijos ya, y con relacion á esta base se fijan los demas. Aquí, para fijar el K, elejirémos por nueva base la distancia FG y colocando en sus estremos el instrumento, medirémos los ángulos KFG, KGF, que nos fijarán la posicion del

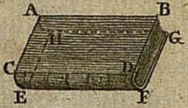
punto K. Para fijar los puntos H, L, elejirémos por base la EF, y así se continuaria si quedasen mas puntos por determinar.

FIN DEL TOMO PRIMERO.

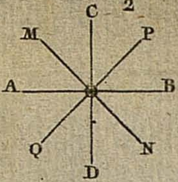
punto K. Para fijar los puntos H, L, elegirémos por base la EF, y así se continuaria si quedasen mas puntos por determinar.

FIN DEL TOMO PRIMERO.

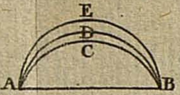
1



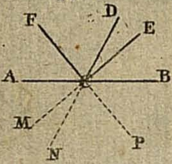
2



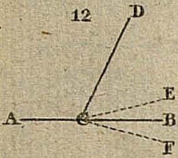
3



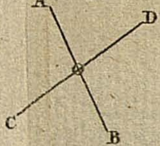
11



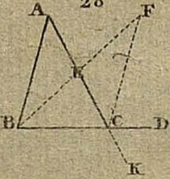
12



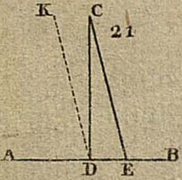
13



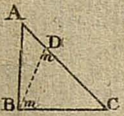
20

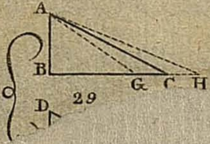


21



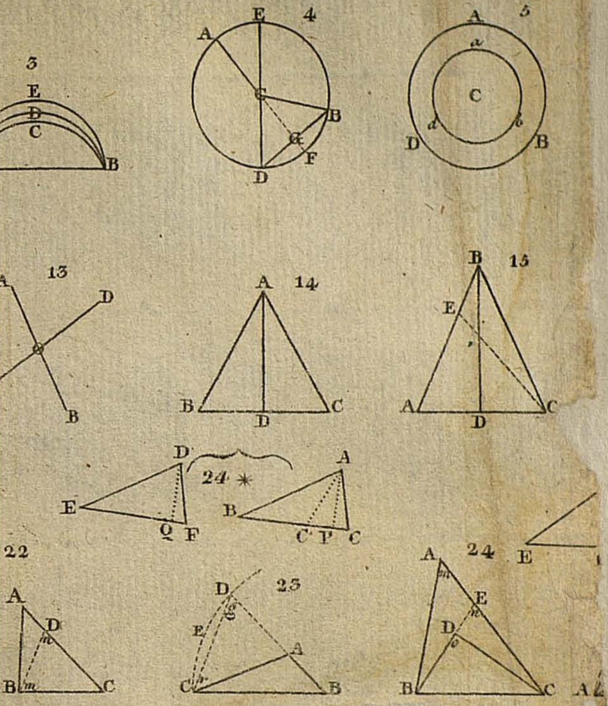
22

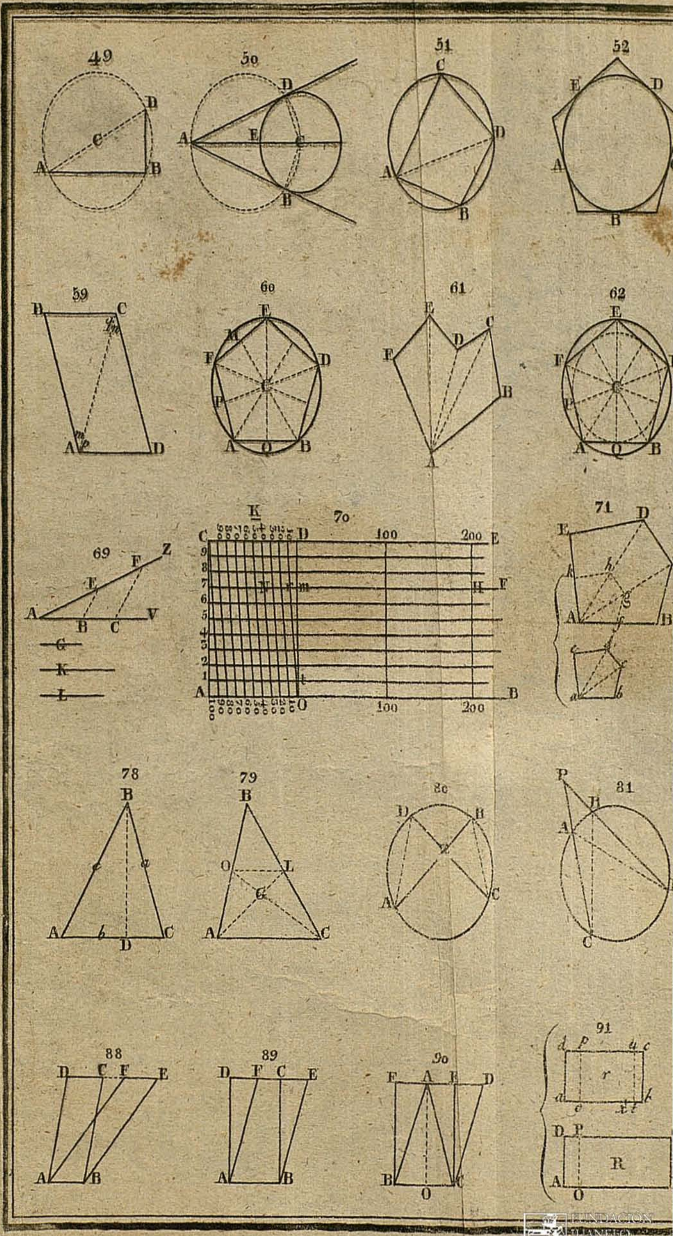


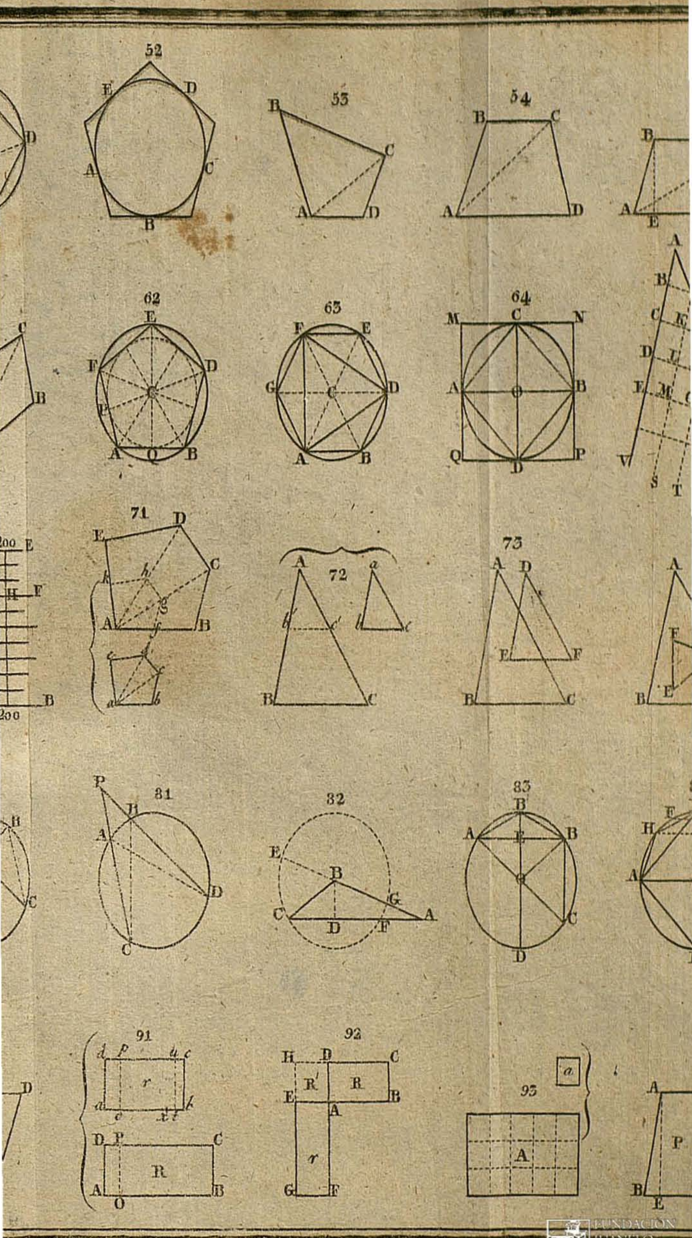


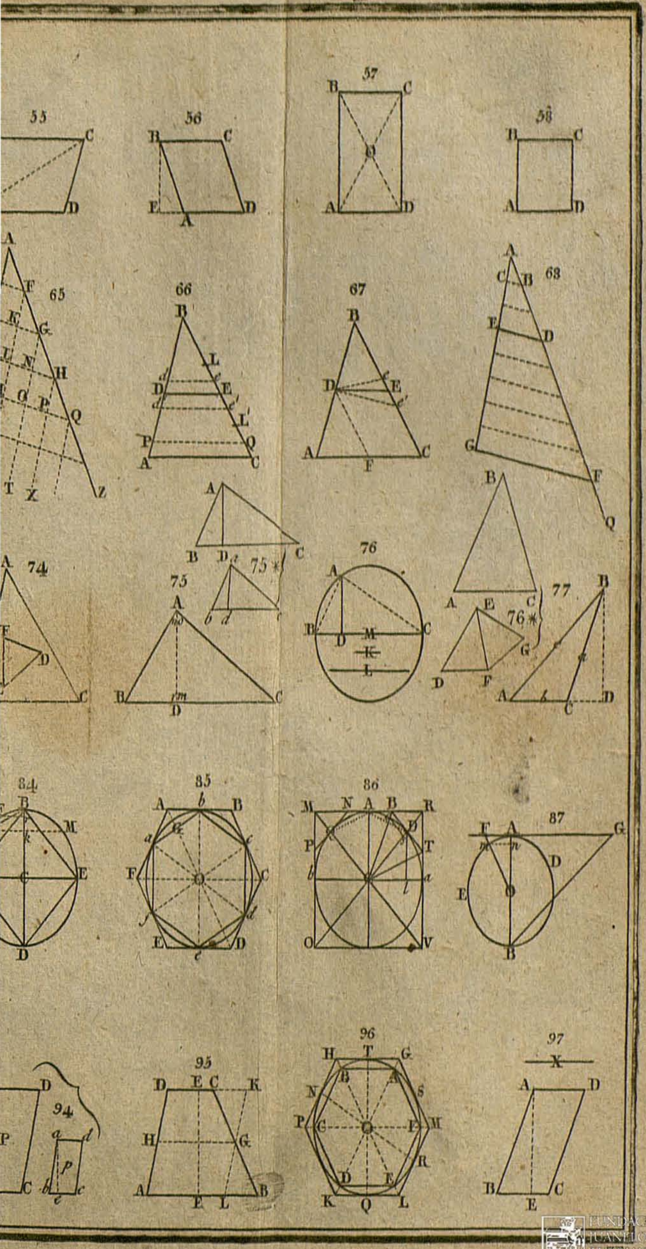
29

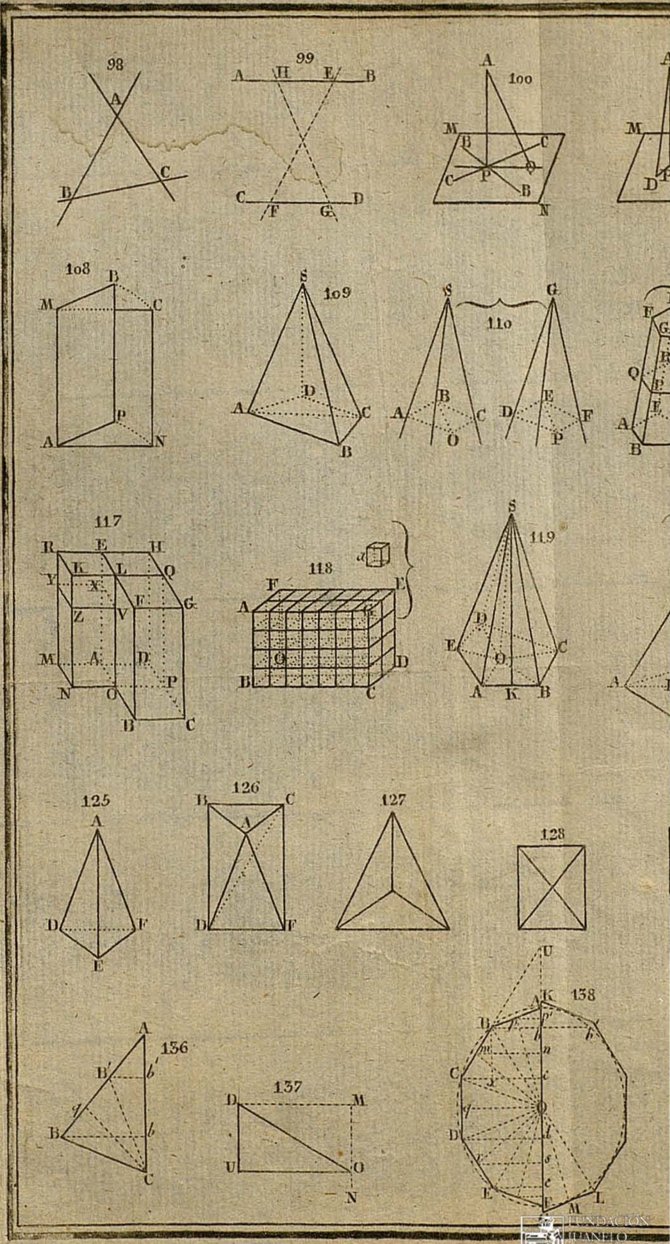
30


3
E
D
C
B
4
E
A
C
B
G
F
D
5
A
a
C
d
b
D
B
13
A
D
B
14
A
B
C
D
15
B
E
A
C
D
D
24 *
A
E
Q
F
B
C
P
C
22
A
D
m
B
m
C
23
D
E
A
C
B
24
A
m
E
n
D
o
B
C
E
A

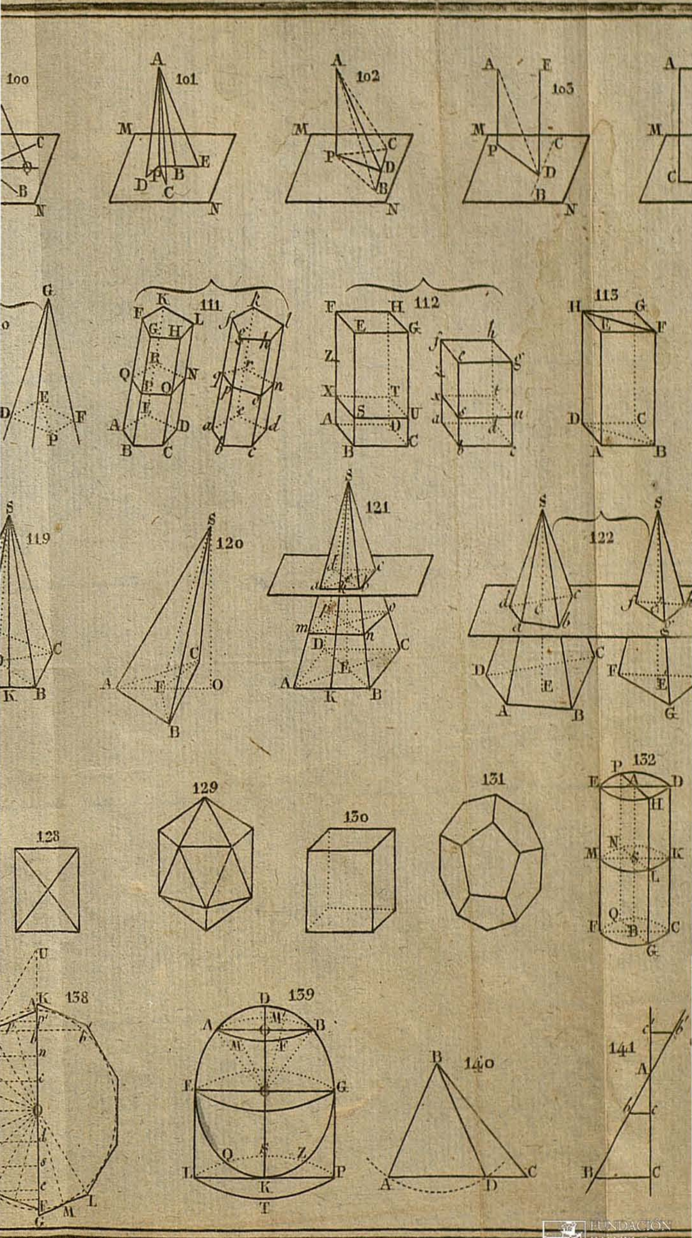

49
50
51
52
59
60
61
62
69
70
71
100
200
78
79
80
81
88
89
90
91

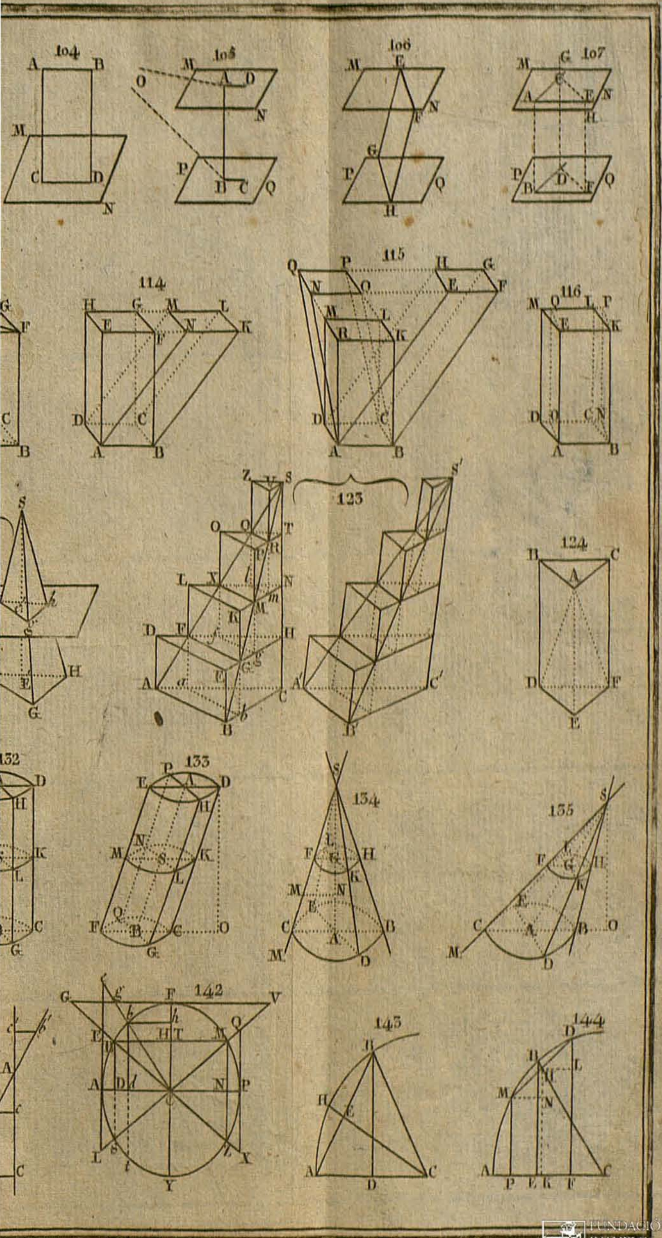

52
53
54
62
63
64
71
72
73
81
82
83
91
92
93


55
56
57
58
65
66
67
68
74
75
75 *
76
76 *
77
84
85
86
87
94
95
96
97



T. Rocafort g.


100
101
102
103
111
112
113
119
120
121
122
128
129
130
131
132
138
139
140
141


104
105
106
107
114
115
116
123
124
132
133
134
135
142
143
144

ate Vallev

V = 5ª Sala